Série A, N° 4597
N° d'ordre : 5444

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES APPLIQUÉES

PAR

MATHERON Georges

1re *THÈSE.* — LES VARIABLES RÉGIONALISÉES ET LEUR ESTIMATION.

2e *THÈSE.* — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 10 Novembre 1965 devant la Commission d'examen.

MM. SCHWARTZ *Président.*
FORTET, CAILLEUX } *Examinateurs.*

MASSON ET CIE, ÉDITEURS
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS, VIe
1965

Série A, N° 4597
N° d'ordre : 5444

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES APPLIQUÉES

PAR

MATHERON Georges

1re *THÈSE.* — LES VARIABLES RÉGIONALISÉES ET LEUR ESTIMATION.

2e *THÈSE.* — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 10 Novembre 1965 devant la Commission d'examen.

MM. SCHWARTZ *Président.*
FORTET
CAILLEUX } *Examinateurs.*

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

MASSON ET Cie, ÉDITEURS
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS, VIe
1965

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen ..... M. ZAMANSKY.

BRELOT ..... T Analyse supérieure.
PRENANT ..... T Anatomie et histologie comparée.
GRASSE ..... T Évolution des êtres organisés.
PRÉVOST ..... T Chimie organique.
WYART ..... T Minéralogie et cristallographie.
TEISSIER ..... T Zoologie.
MANGENOT .... T Biologie végétale (Orsay).
AUGER ..... T Physique quantique et relativité.
MONNIER ..... T Physiologie générale.
PIVETEAU ..... T Paléontologie.
ROCARD ..... T Physique (E.N.S.).
CARTAN ..... T Mathématiques (E.N.S.).
LAFFITTE ..... T Chimie générale.
N... ..... T Géométrie supérieure.
COULOMB ..... T Physique du globe.
Mlle COUSIN ... T Biologie animale (S.P.C.N.).
CHRÉTIEN ..... T Chimie minérale.
BOCQUET..... T Zoologie.
KASTLER..... T Physique (E.N.S.).
EPHRUSSI ..... T Génétique.
RIVIÈRE ..... T Géologie (S.P.C.N.) et sédiment. (Orsay).
GAUTHERET .... T Biologie végétale (P.C.B.).
LUCAS R..... T Recherches physiques.
THOMAS A. .... T Biologie cellulaire.
ARNULF ..... T Optique appliquée.
MORAND ..... T Physique enseignement.
SOLEILLET ..... T Physique (P.C.B.).
FORTIER ..... T Mécanique exp. des fluides.
DRACH ..... T Zoologie.
QUENEY ..... T Météo. et dynamique atmos.
GALLIEN ..... T Embryologie.
EICHORN ..... T Botanique.
DE CUGNAC .... T Biologie végétale (S.P.C.N.).
Mlle CAUCHOIS . T Chimie physique.
THELLIER ..... T Physique du globe.
L'HÉRITIER .... T Biologie générale (Orsay).
GRIVET ..... T Radioélectricité (Orsay).
PONCIN ..... T Mécanique générale.
DUBREIL ..... T Arith. et théorie des nombres.
QUELET..... T Chimie organique.
CAGNIARD ..... T Géophysique appliquée.
CHAMPETIER.... T Chimie Macromoléculaire.
CUVILLIER ..... T Micropaléontologie.
JUNG ..... T Géologie.
TRILLAT ..... T Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN ..... T Chimie organique et structurale.
JACQUINOT .... T Spectrocospie et physique céleste (Orsay).
VASSY ..... T Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES ... T Théorie physique.
AMIEL ..... T Chimie générale.
HOCART ..... T Minéralogie et Cristallographie.
J. P. MATHIEU.. T Physique Optique.
COUTEAUX ..... T Cytologie.
MAY ..... T Zoologie.
CHOQUET ..... T Théorie des fonctions et Topologie.
FELDMANN .... T Biologie Végétale marine.
GUINIER ..... T Physique des solides (Orsay).
JOST ..... T Physiologie comparée.
FORTET ..... T Calcul des Probabilités et Physique mathématique.

SCHWARTZ ..... T Calcul diff. et Intégral.
CHOUARD ..... T Physiologie Végétale.
MALAVARD .... T Aviation (Technique Aéronaut.).
NORMANT ..... T Synthèse organique.
BÉNARD ..... T Chimie Minérale.
BUVAT ..... T Botanique (E.N.S.).
DUGUÉ ..... T Statistiques Mathématiques.
SOULAIRAC .... T Psychophysiologie.
ULRICH ..... T Physiologie Végétale appliquée.
MARÉCHAL ..... T Optique théorique et Appl.
KIRRMANN .... T Théories Chimiques.
CHADEFAUD ... T Botanique.
Mlle LE BRETON T Physiologie de la nutrition.
LELONG..... T Applic. de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS .... T Anatomie et Histologie Comparées.
EHRESMANN ... T Topologie Algébrique.
FRANÇON ..... T Physique (S.P.C.N.).
GLANGEAUD ... T Géographie phys. et Géologie.
GODEMENT .... T Mathématiques (M.G.P.).
PISOT ..... T Tech. Mathém. de la Phys.
ROCH..... T Géologie.
SCHATZMANN ... T Astrophysique.
TERMIER ..... T Géologie générale.
ZAMANSKY ..... T Mathématiques générales.
LENNUIER ..... T Physique (M.G.P.).
RIZET ..... T Génétique (Orsay).
ROUTHIER ..... T Géologie appliquée.
Mme TONNELAT T Physique Théorique.
DIXMIER ..... T Mathématiques (M.P.C.).
SOUCHAY ..... T Chimie générale.
AIGRAIN ..... T Électrotechnique générale.
BRUSSET ..... T Chimie systématique.
M. LÉVY ..... T Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
Mme CHAIX..... T Chimie biologique.
Mme HUREL-PY. T Biologie Végétale (P.C.B.).
PANNETIER..... T Chimie générale.
BRUN..... T Mécanique des fluides I.
LEDERER ..... T Chimie biologique (Orsay).
Mme DUBREIL .. T Mathém. (Agrégation).
Mme LELONG ... T Mathématiques II (E.N.S.).
BELLAIR ..... T Géologie (S.P.C.N.).
COTTE ..... T Physique électricité.
DUBOIS J. E. .. T Chimie organique.
LAMOTTE ..... T Zoologie (E.N.S.).
MICHEL A. ..... T Chimie minérale (Orsay).
OLMER ..... T Énergétique générale.
ROUAULT ..... T Électricité (Orsay).
GAUTHIER..... T Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ ... T Chimie Physique.
BROSSEL ..... T Physique atomique.
BUSER ..... T Physiologie comparée.
CAMUS ..... T Physiologie végétale.
CASTAING ..... T Physique II thermo. (Orsay).
CURIEN ..... T Minéralogie et Cristallog.
MOYSE ..... T Physiologie végétale (Orsay).
Mme CHARNIAUX COTTON .. T Évolution des êtres organisés.
POSSOMPES .... T Zoologie.
PULLMANN .... T Chimie quantique.
TEILLAC ..... T Physique nuc. et radioactivi. (Orsay).
TONNELAT ..... T Bio. physico. chim. (Orsay).

LLE	T	Économétrie.
ILLEMART	T	Chimie (P.C.B.).
ODE	T	Chimie (Orsay).
EYMANN	T	Recherches Physiques.
INOCHET	T	Biologie végétale S.P.C.N. (Orsay).
OLLET	T	Chimie minérale.
le JOSIEN	T	Chimie (S.P.C.N.).
EVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
NOULT	T	Électronique (Orsay).
APELLE	T	Physique I (Orsay).
ELANGE	T	Mathématiques I (Orsay).
ENY	T	Mathématiques générales (Orsay).
ERMAIN	T	Mécan. théor. des fluides.
GAS	T	Géologie.
LLARD.....	T	Chimie Physique.
ERTHELOT	T	Physique des particules fondamentales (Orsay).
ICARD	T	Météorologie et phys. de l'Atmosphère.
me ALBE-FESSARD ...	T	Psycho. physiologie.
IEDEL	T	Physique des solides (Orsay).
JULIA	T	Études des Moléculaires complexes.
ENDER	T	Biologie animale S.P.C.N. (Orsay).
AGAT	T	Physico chimie des radioéléments.
le QUINTIN ..	T	Électrochimie.
ONOD	T	Chimie du métabolisme.
ENOIT	T	Physiologie animale (Orsay).
E POSSEL	T	Analyse numérique.
IARLOT	T	Chimie analytique.
EMÉE	T	Écologie végétale (Orsay).
UÉRIN	T	Chimie M.P.C. (Orsay).
IATELET	T	Chimie (P.C.B.),
AN	T	Physiologie nucléaire (Orsay).
ATTLER	T	Physique (S.P.C.N.).
ERGERARD	T	Zoologie (Orsay).
ERTEIN	T	Électronique (Orsay).
OUISSIÈRES ...	T	Radiochimie.
me COUTURE .	T	Thermodynamique et Mécanique Physique.
LLEMBERGER..	T	Géologie des grandes régions du globe (Orsay).
RANC	T	Biologie animale (P.C.B.).
HNELL		Botanique tropicale.
LKOWSKI	T	Physiologie végétale.
CHER.....	T	Chimie biologique.
AUDOIN.....	T	Biologie animale (P.C.B.).
EAUMONT		Biologie animale (S.P.C.N.).
LAMONT		Géophysique Ionosphère.
OUREAU	T	Botanique.
URIE D.		Physique (M.G.P.).
URAND-DELGA	T	Géologie.
RÉON.....	T	Chimie organique (Orsay).
ELLER	T	Physiologie végétale.
ORTRAT	T	Calcul des Probabilités.
AILLEUX	T	Géologie (S.P.C.N.).
AGNAN		Physique électricité.
AUDEL	T	Mécanique ondulatoire appl. à la Chimie Théorique et à la Physique nucléaire.
lle FOURCROY.		Biologie Végétale (S.P.C.N.).
me CHOQUET BRUHAT..		Mécanique Analytique et Mécanique céleste.
lle VEIL	T	Physiologie Générale.
WOFF	T	Microbiologie.
ESTRUNCK ...	T	Mécanique Phys. et Expérim.
ACOMBE	T	Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay).
ROCHARD	T	Physique P.C.B. (Orsay).
CABANNES	T	Mécanique générale.
LESIEUR	T	Math. I (Orsay).
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay).
CAIRE		Géographie physique et Géologie Dynamique.
COMOLET.....		Mécanique des fluides.
CORABOEUF	T	Physiologie animale (Orsay).
DELLOUE	T	Physique de l'exosphère.
GORENFLOT		Botanique II (Orsay).
HOUILLON		Biologie Animale (P.C.B.).
JULLIEN J.		Chimie S.P.C.N. (Orsay).
MALGRANGE ...	T	Technique math. de la phys. (Orsay).
OLIVIER		Antropologie.
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay).
BLANC-LAPIERRE	T	Physique E.N.S. (Orsay).
CHEVAUGEON ..	T	Botanique (Orsay).
KAHANE	T	Mathématiques (Orsay).
SAMUEL.....	T	Mathématique E.N.S. féminines.
KOURGANOFF ..	T	Astronomie (Orsay).
THIRY	T	Mécanique céleste.
ABELES		Physique (S.P.C.N.).
AMAT.....	T	Physique (P.C.B.).
AUBOIN	T	Géologie.
Mme BENOIT-GUEUTAL...	T	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
BOUGIS		Biologie marine Villefranche/mer.
BRUHAT	T	Mathématiques (M.P.C.).
BRUNN	T	Géologie historique (Orsay).
CHABBAL.....	T	Physique M.G.P. (Orsay).
DEHEUVELS	T	Mathématique Propé.
D'ESPAGNAT ...	T	Physique théorique (Orsay).
FURON	T	Géologie (S.P.C.N.).
Mme GANS	T	Génétique.
GENEVES		Biologie végétale (P.C.B.).
GUILBERT		Physique C.U.S. Orléans.
HUPE	T	Pétrographie.
HOLLANDE	T	Biologie générale.
LIONS	T	Analyse numérique.
MAITTE	T	Chimie (P.C.B.).
MEYER		Physique propédeutique.
NICOLAS		Géologie appliquée.
PANIGEL		Biologie générale.
RAVIER		Pétrographie.
ROSEAU	T	Mécanique théor. des fluides.
ROUBINE		Électronique.
SILBER	T	Chimie P.C.B.
UEBERSFELD ...	T	Électronique.
YVON	T	Théories Physiques.
HERVÉ	T	Mathématiques.
NÉRON	T	Math. M.P.C. (Orsay).
Mme PECKER-WIMEL...	T	Astrophysique.
BALKANSKY		Physique (M.P.C.).
LE CORRE.....	T	Électricité.
DELCROIX	T	Physique théorique (Orsay).
GOURDIN		Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
LEHMANN	T	Phys. exp. des hautes énergies.
NATAF	T	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
ECHALIER		Biologie animale (P.C.B.).
BARRAUD		Physiologie cellulaire.
LIORET		Physiologie végétale (Orsay).
DARS		Géologie struc. et géol. appliquée.
CAMEFORT	T	Botanique (agrégation).
VICHNIEWSKY ..	T	Mécanique industrielle.
BLAQUIÈRE		Électronique (Orsay).
ARNOUS	T	Physique théorique.
TATIBOUET		Chimie (CSU Orléans).

Malliavin	T	Math. propé. (Orsay).
Gaudemar		Chimie propédeutique.
Perez y Jorba.		Physique exp. des hautes énergies (Orsay).
David	T	Chimie (agrégation Orsay).
Brousse	T	Mécanique théorique.
Rosch	T	Astronomie.
Guy.....	T	Physique expérimentale.
Lazard		Math MPC.
Morel P.		Physique MPC.
Arsac		Programmation.
Lefebvre		Chimie MPC.
Chapeville ...		Biochimie.
Benoit		Physique CPEM.
Rio		Chimie CPEM.
Jauzein		Géologie ENS.
Prevost G.		BV CPEM.
Favard P.		BA CPEM.
Vilkas		Chimie CPEM.
Mlle Ficini		Chimie CPEM.

Lequeux	Astronomie.
Cohen Tannoudji..	Physique MPC.
Tavernier.....	Physique CPEM.
Mme Roizen ...	Physique CPEM.
Durand M.	BA SPCN.
Pascaud.....	Physiologie.
Mme Petit	BA CPEM.
Brousse	Géologie (Orsay).
Cagniac	Physique agrégation (Orsay).
Leberre	Zoologie (Orsay).
Scheffer.....	Microbiologie (Orsay).
De Gennes	Physique des solides (Orsay).
Riou	Physique nuclé. exp. (Orsay).
Clauser	Chimie biologie (Orsay).
Chevalier	Physio. animale (Orsay).
Jancovici	Physique atomique (Orsay).
Falk-Vairant .	Physique nucléaire (Orsay).
Fétizon	Chimie propé. (Orsay).
Cerf	Mathématiques (Orsay).

Secrétaire général ..... R. Poullain.

AVANT-PROPOS

Il m'est extrêmement agréable d'exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont guidé, conseillé, encouragé au cours du travail que je présente ici : c'est à leur compréhension et à leur indulgence qu'il a dû de venir au jour. Je remercie tout particulièrement :

M. le Professeur FORTET, qui a bien voulu accepter de diriger mon travail et en être le rapporteur,

M. le Professeur L. SCHWARTZ qui, loin de me tenir rigueur d'un usage un peu maladroit de la théorie des Distributions, m'a fait le très grand honneur de présider mon jury de thèse,

M. le Professeur CAILLEUX qui, en acceptant de participer à mon jury, m'a apporté une aide d'autant plus précieuse qu'elle venait du monde des Sciences de la Terre.

Au cours des dix années d'activité pratique, dont le présent travail tente de faire la synthèse théorique, très nombreux ont été ceux qui m'ont aidé, soit en m'ouvrant, de leur autorité, de nouveaux champs d'applications, soit en me faisant bénéficier de leur expérience pratique au cours de fructueux échanges d'idées, soit enfin, directement par leur propre travail actif mené parallèlement au mien ou en collaboration avec lui, mais toujours dans un climat de parfaite entente. Je leur dois beaucoup, et, ne pouvant les remercier individuellement, je les prie de trouver ici l'expression de ma gratitude.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546824_0001

Maestro, di; che terra é questa?

INTRODUCTION

1. — Notion de variable régionalisée.

Dans un grand nombre d'activités humaines, notamment dans les sciences de la Terre, l'art des mines, etc... on s'intéresse à la répartition dans l'espace de certaines grandeurs, que nous appellerons, d'un terme général, des *variables régionalisées*. Comme exemples simples de variables régionalisées, citons, entre autres : les densités de population humaine dans une zone géographique, la puissance (ou épaisseur) d'une formation géologique, la teneur en un métal donné dans un gisement minier, etc...

Le technicien peut ne s'intéresser à une telle grandeur que pour des raisons d'ordre purement utilitaire. Par exemple, il peut s'agir, pour un mineur, d'estimer les réserves d'un gisement, en tonnage et en teneur, à partir d'un échantillonnage fragmentaire, et, dans la mesure du possible, d'accompagner ces estimations d'un calcul d'erreur. Mais on peut aussi s'intéresser à ces grandeurs, plus généralement, pour essayer de rendre intelligible le phénomène naturel (régionalisé) qu'elles représentent. Il s'agit alors d'extraire, de la masse des données numériques brutes disponibles, les grands traits structuraux et les caractéristiques majeures d'un phénomène naturel.

Ces deux points de vue ne s'opposent nullement. En fait, pour résoudre correctement un problème essentiellement pratique, comme le calcul de l'erreur possible commise dans l'estimation d'un gisement minier, il est impératif de tenir compte de certains caractères structuraux de la variable régionalisée, tels que sa continuité. L'exemple élémentaire suivant le montre clairement. Supposons que des mesures effectuées, à intervalles réguliers, le long d'une ligne, sur le terrain, aient donné, dans un premier cas, la séquence A de valeurs numériques :

A) 1-2-3-4-5-6-5-4-3-2-1

et, dans un deuxième cas, la séquence B :

B) 1-4-3-6-1-5-4-3-2-5-2

Dans le cas A, on a manifestement une structure symétrique très forte, caractérisée par une décroissance très régulière de part et d'autre d'un maximum central. Dans le deuxième cas, la structure, si elle existe, est très faible, et l'impression qui se dégage est celle d'une extrême irrégularité. Bien que les onze mesures aient donné dans les deux cas les mêmes valeurs numériques (dans un ordre différent), il est clair que l'estimation d'une valeur moyenne peut être faite, dans le cas A, avec une bien meilleure précision que dans le cas B. La précision dépend, en effet, de la continuité dans l'espace de la variable régionalisée.

On voit aussi, sur cet exemple simple, que la description purement statistique du phénomène est tout à fait insuffisante. Le statisticien qui se contenterait de construire les histogrammes des séquences A et B conclurait, puisque ces deux histogrammes sont identiques, mais bien à tort, à l'identité des deux phénomènes naturels observés. Dans le traitement statistique ordinaire, où l'on se contente de classer sous forme d'histogrammes les échantillons disponibles, on fait par là même abstraction de l'endroit où ils ont été prélevés. On détruit les structures spatiales. Or, il est clair qu'il ne suffit pas de savoir avec quelle fréquence une teneur donnée se répète dans un gisement minier. Il est au moins aussi important de savoir de quelle manière les teneurs se succèdent dans l'espace, et, notamment, quelles sont la taille et la position des zones exploitables, etc...

Il apparaît ainsi que les variables régionalisées ne peuvent pas être assimilées aux variables aléatoires, dont l'étude est l'objet de la statistique habituelle. De fait, la notion de variables aléatoire ne peut recevoir un contenu concret que moyennant les deux conditions suivantes :

1. Possibilité, au moins théorique, de répéter indéfiniment l'épreuve qui attribue une valeur numérique définie à la variable aléatoire.
2. Indépendance mutuelle de ces épreuves, le résultat de l'une d'elle ne devant être en aucune manière influencé par le résultat de celles qui l'ont précédé.

Or une variable régionalisée ne peut vérifier ces deux conditions. Si l'épreuve consiste, par exemple, à prélever un échantillon de caractéristiques définies au point de coordonnées xyz, à l'intérieur d'un gisement, la teneur d'un tel échantillon est unique, physiquement bien déterminée et nullement aléatoire. Il n'y a aucune possibilité de répétition, et la condition 1 n'est pas vérifiée. Il est cependant possible de prélever un nouvel échantillon, non plus au même point, mais en un point voisin du précédent : bien qu'il ne s'agisse plus, à strictement parler, de la même épreuve, on pourrait à la rigueur

admettre que la condition 1 est approximativement respectée. Mais alors la condition 2 ne le sera en aucune façon. Si le premier échantillon a été prélevé dans une zone riche, le deuxième implanté dans son voisinage, aura tendance, en moyenne, a être riche également, et cette tendance sera d'autant plus marquée que la minéralisation sera plus continue.

2. — Caractéristiques qualitatives des variables régionalisées.

Les variables régionalisées, qui se présentent à l'observation, possèdent des caractéristiques qualitatives, étroitement liées à la structure du phénomène naturel qu'elles représentent. Parmi ces caractéristiques, que la statistique ordinaire est incapable d'exprimer, et qui doivent obligatoirement être prises en charge par la théorie des variables régionalisées, examinons, en nous référant à l'exemple déjà donné d'une teneur dans un gisement minier, quelques-unes des plus importantes :

a) ***Localisation.*** — Une variable régionalisée ne prend pas ses valeurs n'importe où, mais dans une région bien déterminée de l'espace, que l'on appelle *champ géométrique :* Le champ est en général une formation géologique, par exemple l'espace minéralisé du gisement lui-même. Mais on devra parfois limiter l'étude de la variable à une portion, ou panneau, de son champ géométrique naturel. De même, la variable sera parfois définie comme une fonction de point $f(M)$. Le plus souvent, cependant, on ne s'intéressera pas aux valeurs ponctuelles, mais aux valeurs moyennes de la variable à l'intérieur d'un petit domaine, ou *support géométrique.* Pour une teneur, le support sera le volume v de l'échantillon prélevé. Le support v doit être défini de manière précise, avec ses dimensions, sa forme géométrique, et son orientation dans l'espace. Si l'on change le support v, on obtient une nouvelle régionalisation, qui présente des analogies avec la première, mais ne lui est pas identique. C'est ainsi que des blocs de quelques mètres cube ne se distribuent pas dans l'espace de la même manière que des carottes de sondage de quelques kilo. L'une des tâches de la théorie des variables régionalisées, que l'on appelle parfois aussi *géostatistique* quand elle s'applique à des problèmes géologiques ou miniers, consiste à prévoir les caractéristiques de la variable définie sur un support v et dans un champ V, connaissant, par exemple, celles de la variable ponctuelle dans un champ différent V′.

b) ***Continuité.*** — Un deuxième caractère essentiel est le degré de plus ou moins grande continuité dans l'espace de la régionalisation. Dans certains cas, par exemple, pour des variables possédant une signification purement géométrique, comme la puissance d'une formation géologique, on observera la continuité stricte des mathématiciens, qui se définit avec des ε et des η. Le plus souvent, on n'observera qu'une continuité plus lâche, dite *continuité en moyenne.* Dans ce cas, lorsque le point M tend vers M_0, c'est seulement la valeur moyenne de $[f(M) - f(M)_0]^2$ qui tend vers zéro. La répartition dans l'espace prend déjà une allure plus irrégulière et discontinue. Enfin, il arrive que la continuité en moyenne ne soit même pas vérifiée. Dans ce cas d'extrême irrégularité, nous parlerons d'*effet de pépite.* Les gisements d'or pépitique en fournissent un exemple classique.

c) ***Anisotropie.*** — En troisième lieu, une régionalisation peut être anisotrope. Il peut exister, par exemple, une direction privilégiée, le long de laquelle les valeurs se modifient lentement, tandis qu'elles varient beaucoup plus vite dans la direction perpendiculaire. Ce genre de phénomènes, connus sous le nom de runs, de zonalités, etc... est en général lié à l'existence de certaines structures géologiques.

d) ***Phénomène de transition.*** — D'autres types de structures peuvent se manifester, liées à l'apparition dans le champ géométrique de la variable, d'un réseau de discontinuités : on parle alors, d'une manière générale, de *phénomènes de transition.* Comme exemples simples, on peut citer, pour les formations sédimentaires, la stratification et le relais lenticulaire des bancs. Il peut arriver que la variable, constante ou quasi constante à l'intérieur des bancs, subisse des variations brusques au passage d'un banc à l'autre. A ces discontinuités verticales, matérialisées dans l'espace par les joints stratigraphiques, viennent souvent s'ajouter des discontinuités horizontales, dûes à la terminaison lenticulaire et au relais des bancs individuels. Ce réseau complexe de discontinuités réalise une partition de l'espace minéralisé en compartiments plus ou moins indépendants les uns des autres (correspondant, par exemple, à d'anciens micro-bassins de sédimentation, où les conditions de dépôt ont évolué de façon plus ou moins autonome).

On peut noter que l'effet de pépite d'origine granulométrique est lié, lui aussi, à un phénomène de transition. Le réseau de discontinuité est ici celui qui sépare, dans l'espace, les différents grains de stérile et de minerai. La nature du phénomène est la même, mais l'échelle

est bien différente. L'effet de pépite apparaît comme une forme de phénomène de transition liée à la présence de micro-structures discontinues dans le champ de la régionalisation.

3. — Les schémas théoriques.

Pour élaborer une représentation mathématique des variables régionalisées, capable de rendre compte des caractères structuraux énumérés ci-dessus, on peut penser utiliser la théorie probabiliste des fonctions aléatoires. Il faut bien voir, cependant, que les naturalistes soulèvent ici une objection très forte, liée à l'unicité des phénomènes naturels et à l'impossibilité de l'inférence statistique.

Rappelons, en effet, rapidement la notion de fonction aléatoire. Partant de la notion d'une variable aléatoire simple X, définie par sa loi de distribution probabiliste $F(x)$, les mathématiciens ont introduit ensuite des variables aléatoires à plusieurs composantes $(X_1, X_2, \ldots X_n)$, décrites par des lois de distribution simultanée $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, puis ils ont examiné ce qui se produit lorsque n devient infini. Une fonction aléatoire est, si l'on veut, une variable aléatoire a une infinité de composantes. Dans le cas qui nous occupe, ces composantes, en nombre infini, seraient les valeurs prises par la variable régionalisée en chacun des points de son champ géométrique. On voit quelle est l'objection des naturalistes. Les valeurs effectivement prises par la variable en tous les points de son champ doivent être considérées comme ayant été obtenues simultanément par un tirage au sort, en une épreuve unique, effectuée selon la loi de probabilité à une infinité de composantes qui définit la fonction aléatoire. Mais le passage inverse n'est pas possible. L'épreuve ayant été unique, on ne peut pas remonter des valeurs expérimentales à la distribution théorique, pas plus qu'on ne peut inférer la loi de probabilité $F(x)$ d'une variable aléatoire ordinaire X lorsque l'on dispose seulement du résultat d'une épreuve unique, ayant donné une valeur numérique particulière (par exemple $x = 98$).

Dès lors que l'inférence statistique n'est pas fondée, il est clair que seules les valeurs numériques effectivement prises par la variable régionalisée, c'est-à-dire le phénomène naturel lui-même, possèdent une réalité physique, et tout recours à une interprétation probabiliste apparaît comme parfaitement arbitraire. Tel est effectivement le point de vue adopté par la théorie des variables régionalisées dans un premier groupe de méthodes appelées *représentations transitives*. Ces méthodes, qui font l'objet de la première partie de l'ouvrage, ne

font appel à aucune hypothèse probabiliste, ni d'ailleurs à aucun principe de déterminisme : le déterminisme n'est pas nié à priori, mais il ne peut être mis en évidence qu'à l'aide d'études spécifiques, concernant chaque catégorie de phénomènes naturels, et il ne servirait à rien de l'invoquer, *in abstracto*, au niveau des généralités. Le point de vue, purement descriptif et formel, adopté dans les représentations transitives, peut être comparé à celui de la cinématique, qui dégage les lois générales et formelles auxquelles tout mouvement doit obéir, quels que soient ses causes et son contenu physique, du seul fait qu'il est mouvement. La démarche essentielle consiste à associer à toute variable régionalisée une fonction $g(h)$ plus simple, appelée *covariogramme transitif*, capable d'exprimer, sous forme synthétique, les caractéristiques structurales majeures énumérées plus haut, et, en même temps, de formuler et de résoudre des problèmes importants, posés par la pratique, et concernant l'estimation des variables régionalisées.

Mais il y a un cas particulier où l'objection des naturalistes peut être levée. C'est le cas dit stationnaire. En termes abstraits, une fonction aléatoire est dite stationnaire, si la loi de probabilité des valeurs prises par cette fonction en k points arbitraires est invariante pour toute translation d'ensemble de ces points. Autrement dit, le caractère stationnaire entraîne l'homogénéité du phénomène dans l'espace. Si l'on a de solides raisons de penser, par exemple, que les conditions physico-chimiques du dépôt, ou de la génèse, d'une minéralisation sont, effectivement, restées homogènes dans l'espace du gisement, une telle hypothèse peut être adoptée, au moins en première approximation. En vertu du caractère stationnaire, on peut dire que le phénomène s'est, en quelque sorte, répété lui-même dans l'espace, et l'on conçoit que l'inférence statistique redevienne possible, et avec elle une interprétation probabiliste du phénomène, fondée sur la théorie classique des fonctions aléatoires. Un rôle déterminant est joué, dans cette théorie, par la fonction d'auto-corrélation $K(h)$, qui représente la covariance des valeurs prises par la fonction aléatoire en deux points distincts distants de h, et constitue l'équivalent probabiliste du covariogramme $g(h)$ des représentations transitives. Cependant, la théorie de l'autocorrélation n'est pratiquement utilisable que si la fonction aléatoire a une variance à priori finie, alors que d'assez nombreux phénomènes naturels ont une capacité de dispersion quasi illimitée, et ne peuvent pas être décrits correctement si on leur attribue une variance finie. Mais, bien que la variance de la fonction elle-même doive être considérée comme infinie, ses accroissements, ou différences des valeurs qu'elle prend en deux points distincts, conservent,

en général, une variance finie. *La théorie des schémas stochastiques intrinsèques*, qui fait l'objet de la deuxième partie de l'ouvrage, est consacrée à l'étude de cette classe particulière de fonctions aléatoires accessibles seulement par l'intermédiaire de leurs accroissements. Le rôle majeur imparti au covariogramme transitif $g(h)$, ou à la covariance stationnaire $K(h)$, incombe ici à une *fonction de dispersion intrinsèque* $\gamma(h)$, ou demi-variogramme, représentant l'accroissement quadratique moyen de la fonction entre deux points distants de h.

En tant qu'elle postule l'homogénéité du phénomène dans l'espace et se formule en termes probabilistes, la théorie intrinsèque s'oppose fortement aux représentations transitives. Elle est à la fois moins générale et plus puissante. Moins générale, car de larges classes de phénomènes régionalisés, manifestant, par exemple, une allure zonale caractérisée à l'intérieur de leur champ géométrique, ne peuvent pas être considérés comme stationnaires, ni décrits par un schéma intrinsèque, tandis qu'ils restent accessibles aux représentations transitives. Plus puissante, au fond pour la même raison, car les représentations transitives ne sont pas capables de distinguer, dans une régionalisation, ce qui est imputable à la variable « elle-même », et ce qui résulte de la géométrie de son champ, tandis que la théorie intrinsèque élimine d'office toute interférence géométrique, et permet, lorsqu'elle est applicable, une étude plus fine et plus approfondie de la variable « elle-même ». Malgré cette opposition, on constate une remarquable convergence entre les résultats des deux méthodes, et une parenté profonde de leurs formalismes mathématiques. On peut penser que les représentations transitives possèdent un caractère probabiliste implicite, ou, au contraire, que la théorie intrinsèque n'utilise pas réellement le contenu probabiliste de ses hypothèses de base, mais seulement leur caractère stationnaire. En fait, covariogrammes, auto-corrélations et fonctions intrinsèques possèdent des significations très voisines, liées étroitement, comme le montre la physique, à l'énergie de dispersion du phénomène représenté.

4. — Objet et plan de l'ouvrage.

Cet ouvrage est destiné à tous ceux, naturalistes ou techniciens, qui ont affaire, dans leur activité scientifique ou pratique, à des phénomènes régionalisés : géologues, géographes, ingénieurs des mines, météorologistes, etc... Son objet est double. Il s'agit d'une part d'élaborer un appareil conceptuel et un formalisme mathématique capable de décrire, synthétiquement, les caractères structuraux majeurs d'un phénomène naturel, d'autre part de mettre au point des méthodes

d'application permettant de résoudre effectivement les problèmes posés par la pratique, parmi lesquels l'un des plus importants concerne l'estimation des variables régionalisées à partir d'un échantillonnage fragmentaire. Il en résulte, comme sans doute pour tout ouvrage de mathématique orienté vers les applications, une nature un peu mixte, et le risque d'encourir des reproches symétriques de la part des praticiens et des mathématiciens : les premiers trouvant l'ouvrage inutilement abstrait, les seconds insuffisamment rigoureux. Reproches justifiés sans doute, mais difficiles à éviter. Pour obvier en partie à cet inconvénient, inhérent à la nature du sujet traité, nous avons placé en tête de chaque chapitre un sommaire assez détaillé, qui permettra au lecteur de faire le tri, et de ne retenir que ce qui le concerne.

Pour l'essentiel, la compréhension de l'ouvrage ne suppose rien de plus que des connaissances de base en matière de calcul des probabilités. Il est souhaitable d'être familiarisé également avec la théorie des processus stochastiques. Cependant le lecteur trouvera dans le chapitre VII un rappel sur les fonctions aléatoires, résumant les notions de base de cette théorie et les résultats utilisés dans les chapitres suivants. Il faut dire un mot également sur la théorie des distributions. Elle n'intervient explicitement que dans les chapitres III, et X, qui ne sont pas strictement nécessaires à la compréhension du reste de l'ouvrage, et peuvent être omis par les lecteurs qui ne sont pas familiarisés avec cette théorie. A l'intention de ces lecteurs, cependant, nous en donnons dans l'Annexe A un exposé simplifié, mais suffisant pour notre objet. A la vérité, si les distributions ne sont utilisées explicitement que dans les deux chapitres déjà cités, leur présence latente et implicite est partout sensible. C'est qu'en effet les phénomènes naturels sont rarement connus, ou étudiés, au niveau ponctuel. On ne les aborde, le plus souvent, que par l'intermédiaire des réponses qu'ils apportent aux opérations techniques auxquelles on les soumet : prélèvements d'échantillons, exploitation de panneaux, pondérations diverses faisant intervenir globalement les valeurs prises par la variable dans un domaine, ou support, de dimensions non nulles, et non par les valeurs ponctuelles elles-mêmes. L'idée de représenter ces phénomènes par des distributions, plutôt que par des fonctions, est suggérée par la pratique elle-même : bien qu'elle ne soit pas strictement obligatoire, elle s'impose avec insistance, et se révèle fort instructive, en particulier, pour un naturaliste.

Les deux premières parties de l'ouvrage, consacrées respectivement aux représentations transitives et à la théorie intrinsèque, observent des démarches parallèles : Les concepts de base et le for-

malisme général sont exposés en premier lieu (chapitres I et VII-VIII respectivement), et sont ultérieurement étendus au cas des co-régionalisations, c'est-à-dire au cas où, dans un même champ géométrique, coexistent plusieurs régionalisations (ch. V et IX respectivement), puis formulés en termes de distributions (ch III et X respectivement). A ces généralités, succèdent des questions plus spécialisées et davantage orientées vers les applications. Le phénomène très général de la régularisation d'une variable, par pondération ou prélèvement d'échantillons non ponctuels, est étudié de manière approfondie à l'occasion du processus de montée. La montée, opération permettant de passer d'une variable définie dans l'espace à n dimensions à des variables définies dans les espaces à n-1, n-2... dimensions, est la transposition abstraite de la technique minière courante qui consiste à forer des sondages verticaux, à tracer des niveaux horizontaux, etc... Elle s'accompagne d'une régularisation de la variable régionalisée, étudiée en détail en raison de son importance à la fois théorique et pratique (ch. II et XI respectivement). Enfin, les problèmes d'estimation sont formulés dans leur généralité, et l'on dégage des méthodes d'approximation permettant le calcul numérique effectif des variances d'estimation correspondant aux différents types de réseau de prélèvements (ch. IV et XII respectivement). Il y a un rapport étroit, et c'est l'un des thèmes majeurs de l'ouvrage, entre la plus ou moins grande régularité d'une variable et le comportement, au voisinage de l'origine, de son covariogramme ou de sa fonction intrinsèque, comportement caractérisé par une partie irrégulière dont l'aventure, à la montée, met en évidence le processus de régularisation, et que l'on peut faire correspondre, terme à terme, avec le développement limité de la variance d'estimation.

Dans une troisième et dernière partie, nous donnons, en dernier lieu, quelques exemples d'applications géostatistiques, orientés sur le problème de l'estimation des gisements miniers.

PREMIÈRE PARTIE

LES REPRÉSENTATIONS TRANSITIVES

CHAPITRE PREMIER

LE SYMBOLISME TRANSITIF

SOMMAIRE

Ce chapitre expose les concepts fondamentaux et le formalisme général des représentations transitives. A l'exception du paragraphe 5, le contenu de ce chapitre est indispensable pour la compréhension de toute la première partie.

Le paragraphe 1 *définit le champ géométrique* V *d'une variable régionalisée* $f(x)$ *(domaine en dehors duquel* $f(x) \equiv 0$*), et la variable géométrique* $k(x)$ *associée à* $f(x)$ *(*$k(x) = 1$ *si* x *appartient à* V, *et* 0 *dans le cas contraire). Il précise les conditions imposées à* $f(x)$ *(*$|f(x)|$ *sommable), puis définit le covariogramme transitif* $g(h) = \int f(x)\, f(x+h)\, dx = f * \check{f}$, *outil de base de la théorie, et le covariogramme géométrique* $\mathrm{K}(h) = k * \check{k} . \mathrm{K}(h)$ *est égal à la mesure de l'intersection du champ* V *et de son translaté par* h. *Les propriétés de* $g(h)$ *découlent du fait que* $g(h)$ *est de type positif (continuité, inégalité* $|g(h)| \leqslant (0)$, *symétrie* $g(h) = g(-h)$. *On donne ensuite la définition de la quantité de métal* Q *(intégrale de* $f(x)$*) et des indications sur le rapport entre la régularité du* $g(h)$ *en* $h = 0$ *et la régularité de la variable elle-même.*

Le paragraphe 2 *définit les variables à support non ponctuel (prélèvements) et, plus généralement les régularisées* $f * \check{p}$ *d'une variable* f *par une fonction de pondération* p. *Le covariogramme de la régularisée s'obtient en régularisant* g *par le covariogramme de* p. *Les variables régularisées ont, effectivement, un comportement plus régulier que la variable ponctuelle. Lorsque* $p = k$ *est une variable géométrique, on obtient l'algorithme de Cauchy, utile dans la suite* (1,2,9).

Le paragraphe 3 *donne la définition générale de la montée, opération qui fait passer d'une variable à* n *dimensions (teneurs dans un gisement à 3 dimensions) à une variable à* $n - 1$ *dimensions (accumulations des sondages verticaux). Les covariogrammes montent et descendent de la même manière que les variables elles-mêmes.*

Le paragraphe 4 *donne le formalisme de la montée pour les covariogrammes isotropes (claviers). Un peu plus difficile que les 3 premiers, il est indispensable pour comprendre le phénomène essentiel de la régularisation à la montée. Après avoir mentionné les anomalies possibles dûes à un effet rectangulaire, on définit montées et descentes par la transformation de Fourier-Hankel* (1,4,6), *puis, directement, par une convolution* (1,4,18).

Le paragraphe 5 *a un caractère plus théorique. Il peut être omis, sans inconvénients majeurs, par les naturalistes et les techniciens. La relation entre montée et transformation de Hankel* (1,5,3), *permet d'associer à un clavier son clavier réciproque, une montée dans l'un d'entre eux étant associée à une descente de même ordre effectuée dans l'autre. On étudie ensuite la structure algébrique de l'ensemble des montées et des transformations de Hankel : c'est le groupe de Hankel, isomorphe du groupe des translations-symétrie, les montées correspondant aux translations et les transformations de Hankel aux symétries.*

1. — Le covariogramme et sa transformée de Fourier.

Nous avons indiqué, dans l'introduction, le sens physique qu'il convenait d'attribuer à la notion de variable régionalisée. Indépendamment du fait qu'elle représente l'évolution dans l'espace d'un phénomène naturel, une variable régionalisée se définit, d'un point de vue purement mathématique, comme une fonction $f(x)$ prenant en chaque point x, de coordonnées $(x_1, \ldots x_n)$ de l'espace à n dimensions une valeur numérique définie. En pratique, on aura $n = 1$, 2 ou 3, mais il est commode de ne pas spécifier à l'avance le nombre des dimensions de l'espace. Il peut arriver que cette fonction $f(x)$ possède des caractères suffisants de régularité (continuité et dérivabilité) pour qu'il soit possible de la représenter d'une manière satisfaisante en l'interpolant par des fonctions plus simples (des polynomes par exemple). Mais, très souvent, au contraire, la fonction $f(x)$ se comportera de manière extrêmement irrégulière. Elle ne sera, le plus souvent, ni dérivable, ni même continue, et ne pourra se représenter graphiquement, de manière approximative, que par des courbes à « dents de scie ». En pareil cas, l'étude directe de $f(x)$ serait prohibitive, et ne présenterait qu'un intérêt limité, à cause de sa complication même. Mais, sous la complexité et l'irrégularité extrêmes que présente une régionalisation dans sa variation spatiale, se dissimule, en général, la structure d'un phénomène naturel. D'autre part, dans les applications, on a besoin de résoudre certains problèmes de grande importance pratique, comme celui de l'estimation de la variable régionalisée à partir d'un échantillonnage fragmentaire. Remplacer la fonction $f(x)$ elle-même par une fonction $g(h)$ beaucoup plus simple, mais capable cependant, à la fois, de représenter d'une manière synthétique les caractères structuraux majeurs d'une régionalisation, et de permettre la résolution des problèmes pratiques que l'on peut se poser légitimement à son sujet — tel est le premier objectif de la théorie des variables régionalisées.

Champ géométrique et variable géométrique associée. — Nous supposerons, dans ce qui suit, que la fonction $f(x)$ ne prend de valeurs différentes de zéro que dans un domaine borné V que nous appellerons champ géométrique [1] de la variable régionalisée $f(x)$. A l'extérieur de son champ V, la variable est supposée identiquement nulle : la régionalisation est consi-

[1] La notion de champ géométrique de $f(x)$ ne se distingue pas de celle de support d'une fonction ou d'une distribution (voir Annexe A-1).

dérée comme isolée au sein d'un univers vide. Mais les frontières de ce champ ne sont pas infranchissables, et c'est au franchissement de ces frontières que se manifeste, avec d'autant plus d'intensité que la transition est plus brutale, les phénomènes *d'effet de bordure*, sur lesquels nous reviendrons dans les chapitres v et vi. De là, le nom de représentations transitives données aux méthodes exposées dans cette première partie. D'une manière générale, en transitif, *une variable* $f(x)$ *ne peut pas être considérée indépendamment de son champ*, et il n'est en général pas possible de faire le partage entre ce qui est imputable à la variable « elle-même » et à son champ. (Voir chap. v, par. 3 et 4).

Pour caractériser le champ V, il est commode d'introduire la variable régionalisée $k(x)$ définie comme suit :

$$(\text{I,1,1}) \qquad \begin{cases} k(x) = 1 & \text{si } x \text{ appartient à V} \\ k(x) = 0 & \text{si } x \text{ n'appartient pas à V.} \end{cases}$$

Cette variable $k(x)$ s'appelle *variable géométrique* [1] *associée à* $f(x)$.

Dans certains cas, cependant, le champ géométrique V pourra être supposé infini, sous réserve que $f(x)$ vérifie des conditions convenables de sommabilité. On obtient alors un modèle de répartition zonale, où la variable régionalisée tend vers zéro, de manière plus ou moins régulière, à partir d'un noyau, où elle prend des valeurs notables.

Conditions imposées à $f(x)$. — Dans tous les cas *nous supposerons que* $|f(x)|$ *est sommable* (au moins au sens de l'intégrale de Lebesgue), de manière que toutes les intégrales $\int f(x)\,dx$, étendues à des domaines quelconques, aient un sens. Cette condition, imposée par des considérations physiques évidentes, est la seule vraiment nécessaire. En général $f(x)$ ne sera supposée ni dérivable, ni même continue. Elle pourra posséder un réseau complexe de discontinuités (points isolés, lignes, surfaces) ou même n'être continue nulle part. On pourra même accepter que $f(x)$ ne prenne pas de valeurs définies en certains points, pourvu que ces points constituent un ensemble de mesure nulle (par exemple, une ligne ou une surface dans l'espace à 3 dimensions).

Le plus souvent, cependant, les variables régionalisées $f(x)$ seront du type « continu par morceaux », c'est-à-dire qu'elles seront partout continues sauf sur certaines surfaces, constituant un réseau de discontinuité, à la traversée desquelles $f(x)$ subit un saut. Mais ce réseau pourra être très complexe. Dans un gisement minier, par exemple, au niveau ponctuel, la teneur $f(x)$ doit être définie comme une variable géométrique, égale à $+1$ si le point x tombe à l'intérieur d'un grain minéralisé, et à 0 dans le cas contraire. Le réseau de discontinuité est constitué par les surfaces de

[1] En théorie des ensembles, $k(x)$ est dite fonction caractéristique de l'ensemble V. Nous n'usons pas de cette terminologie pour éviter toute confusion avec les fonctions caractéristiques du calcul des probabilités, et aussi pour souligner le fait que $k(x)$ et $f(x)$ sont de même nature.

tous les grains minéralisés du gisement. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire de préciser si $f(x)$ est égale à $+1$ ou à 0 lorsque le point x se trouve appartenir à la surface d'un grain de minerai, puisque ces surfaces constituent un ensemble de mesure nulle.

Le covariogramme transitif $g(h)$**.** — A la variable régionalisée $f(x)$ nous associons une fonction $g(h)$, dite covariogramme transitif associé à $f(x)$, ou, plus brièvement, covariogramme de $f(x)$, définie, pour un argument vectoriel h de coordonnées $(h_1, \ldots h_n)$ par l'expression

$$g(h) = \int f(x)f(x+h)\,dx. \qquad \text{(I,1,2)}$$

Dans cette formule, l'intégrale [1] est une intégrale multiple d'ordre n, étendue à tout l'espace, et dx représente l'élément de volume

$$dx_1, dx_2, \ldots, dx_n,$$

conformément aux notations générales utilisées dans cet ouvrage. (I,1,2) rappelle l'expression du produit de convolution de deux fonctions f_1 et f_2 (voir Annexe A,6,1) :

$$f_1 * f_2 = \int f_1(x)f_2(h-x)\,dx.$$

De fait, en introduisant la transposée $\check{f}$ de f, définie par

$$\check{f}(x) = f(-x)$$

et en changeant x en x-h, on met (I,1,2) sous la forme équivalente :

$$g = f * \check{f}. \qquad \text{(I,1,3)}$$

Le covariogramme $g(h)$ *associé à une variable régionalisée* $f(x)$ *est égal au produit de convolution* $f*\check{f}$ *de* f *par sa transposée.* Il est toujours défini, car, la variable f ayant un champ géométrique V borné, l'intégrale (I,1,2), bien qu'étendue à l'espace entier, ne porte en réalité que sur un domaine borné.

De la même manière, la variable géométrique $k(x)$ définie en (I,1,1) est caractérisée par son covariogramme $\mathrm{K}(h)$

$$\mathrm{K}(h) = k * \check{k} = \int k(x)k(x+h)\,dx \qquad \text{(I,1,4)}$$

dit covariogramme géométrique associé à $f(x)$. L'expression $k(x)k(x+h)$ est égale à l'unité dans le domaine défini comme l'intersection du champ V et de son translatée par $-h$, que nous noterons $\tau_{-h}\mathrm{V}$, et à 0 partout

[1] Le cas échéant, cette intégrale devra être prise au sens des intégrales de Lebesgue.

ailleurs. En effet, $k(x)$ n'est égal à 1 que si x est dans V, et $k(x+h)$ si $x+h=y$ est dans V, donc si $x=y-h$ est dans τ_{-h}V.

Ainsi le covariogramme K(h) *représente la mesure* (le volume si $n=3$, la surface si $n=2$, la longueur si $n=1$) *de l'intersection du champ* V *et de son translaté par* $-h$. En notation ensembliste, une telle intersection se note $V \cap \tau_{-h}V$. Nous écrirons

$$(I,1,5) \qquad K(h) = \text{Mes } V \cap \tau_{-h}V = \text{Mes } V \cap \tau_h V.$$

Propriétés du covariogramme. — Une fonction telle que $g(h)$ ou K(h) est évidemment *symétrique*, comme on le voit en changeant h en $-h$ (et, simultanément x en $x+h$) dans (I,1,2) :

$$(I,1,6) \qquad g(-h) = g(h) \qquad \text{ou} \qquad \check{g} = g.$$

De plus, lorsque le module du vecteur h devient supérieur au plus grand diamètre D de V *(ou portée)*, $k(x)$ et $k(x+h)$ ne peuvent pas être simultanément différents de zéro, de sorte que $k(x)\,k(x+h)=0$, et par suite :

$$(I,1,7) \qquad g(h) \equiv 0 \qquad \text{pour} \qquad |h| > D.$$

Ainsi *le covariogramme ne prend de valeurs non nulles que dans un domaine borné*, tout comme $f(x)$ elle-même.

Des propriétés plus précises peuvent être obtenues par la transformation de Fourier.

Transformées de Fourier de $f(x)$ ***et*** $g(h)$. — Comme V est bornée, et $|f(x)|$ sommable, la transformée $\varphi(u) = \varphi(u_1, u_2, \ldots u_n)$ de $f(x)$

$$(I,1,8) \qquad \varphi(u) = \mathcal{F}f = \int f(x) e^{-2i\pi ux}\, dx$$

est une fonction continue indéfiniment dérivable (Annexe A,8,1) et la transformation inverse

$$f(x) = \bar{\mathcal{F}}\varphi = \int \varphi(u) e^{2i\pi ux}\, du$$

est toujours possible [1].

Comme la transformation de Fourier échange les produits convolutifs et multiplicatifs, on déduit de (I,1,3) que la transformée G(u) du covariogramme $g(h)$

$$(I,1,9) \qquad G(u) = \int g(h) e^{-2i\pi uh}\, dh = |\varphi(u)|^2$$

est égale au carré du module de $\varphi(u)$. Il résulte alors du théorème de

[1] Au moins au sens des distributions (A, 8,2).

Bochner (Annexe A,9,1) que *le covariogramme $g(h)$ est lui-même une fonction de type positif*, et cela entraîne les propriétés suivantes :

a) $g(h)$ est une fonction *continue* de son argument vectoriel h;

b) $g(h) = g(-h)$, conformément à (I,1,6);

c) $g(h)$ est borné en module par sa valeur $g(0)$ à l'origine, laquelle est obligatoirement positive.

$$|g(h)| \leqslant g(0) = \int [f(x)]^2 \, dx. \qquad \text{(I,1,10)}$$

Dans le chapitre IV, nous verrons que l'obligation imposée à $g(h)$ d'être de type positif n'est pas autre chose que la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les variances d'estimation soient positives.

Quantité de métal. — On appelle quantité de métal [1] Q associée à la variable régionalisée l'intégrale étendue à tout l'espace

$$Q = \int f(x) \, dx. \qquad \text{(I,1,11)}$$

En faisant $u = 0$ dans (I,1,8), on obtient :

$$Q = \varphi(0). \qquad \text{(I,1,12)}$$

Considérons maintenant l'intégrale du covariogramme $g(h)$ étendue à tout l'espace. Faisant $u = 0$ dans (I,1,9), on obtient $|\varphi(0)|^2$, c'est-à-dire Q^2 d'après (I,1,12).

$$Q^2 = \int g(h) \, dh. \qquad \text{(I,1,13)}$$

L'intégrale du covariogramme étendue à tout l'espace est égale au carré de la quantité de métal.

Si nous appliquons ce résultat à la variable géométrique $k(x)$ et au covariogramme géométrique $K(h)$, la quantité de métal est remplacée par la mesure (volume, surface, ou longueur selon que $n = 3$, 2 ou 1) du champ V, mesure que nous désignerons également par V :

$$\text{(I,1,14)} \qquad \begin{cases} V = \int k(x) \, dx = K(0) \\ V^2 = \int K(h) \, dh. \end{cases}$$

Signification physique du covariogramme. — Le comportement du $g(h)$ au voisinage de l'origine est d'autant plus régulier que la régionalisation est elle-même plus régulière et continue dans sa variation spatiale. Par

[1] Cette terminologie est d'origine minière : Si V est un gisement et $f(x)$ la teneur au point x, exprimée en métal contenu par unité de volume (teneur volumétrique) si $n = 3$, ou de surface (accumulation) si $n = 2$, ou de longueur (quantité de métal au mètre d'approfondissement) si $n = 1$, Q représente effectivement la quantité de métal contenu dans V.

exemple, si $f(x)$ admet des dérivées du premier ordre, $g(h)$ admet des dérivées d'ordre 1 et 2. Prenant, en effet, une dérivée dans la direction α, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} * \frac{\partial \check{f}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial f}{\partial \alpha} * \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^{\vee} = \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}$$

(on sait, Annexe A,6,1, que pour dériver un produit de convolution, il suffit de dériver l'un ou l'autre de ses facteurs). Comme la dérivée de la transposée $\frac{\partial \check{f}}{\partial \alpha}$ est égale à la transposée de la dérivée $\left(\frac{\partial \check{f}}{\partial \alpha}\right)^{\vee}$ changée de signe, on voit de plus que $-\frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}$ est le covariogramme associé à $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$. Comme $g(h) = g(-h)$ est une fonction paire, les dérivées premières de g sont nulles à l'origine, et $g(h)$ présente à l'origine un comportement parabolique (en h^2).

La réciproque n'est d'ailleurs pas nécessairement exacte. Si $g(h)$ a, à l'origine un comportement en h^2, c'est-à-dire si $g(h)$ est deux fois dérivable en $h = 0$, on sait que $g(h)$, fonction de type positif, est partout deux fois dérivables (Annexe A,9,2). Mais il n'en résulte pas que $f(x)$ soit lui-même dérivable. On peut seulement affirmer que $f(x)$ est *dérivable en moyenne quadratique*, c'est-à-dire que l'intégrale :

$$\text{(I,1,15)} \qquad \int \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]^2 dx = -2\left[\frac{g(h) - g(0)}{h^2}\right]$$

tend vers une limite $-g''(0)$ lorsque $|h|$ tend vers 0.

De l'existence de $g''(0)$ on déduit seulement que $f(x)$ est continue presque partout (c'est-à-dire sauf, au plus, sur un ensemble de mesure nulle).

En pratique, les fonctions $f(x)$ discontinues qu'il est possible de rencontrer sont du type « continu, par morceaux », c'est-à-dire sont partout continues, sauf à la traversée d'un réseau de discontinuité, où elles présentent des sauts. On voit facilement que pour une fonction de ce type l'intégrale (I,1,15) ne peut pas avoir de limite, de sorte que les dérivées secondes à l'origine n'existent pas. *Ainsi, un covariogramme présentant à l'origine un comportement parabolique caractérise, pratiquement, une variable régionalisée continue au sens usuel.*

Nous avons vu, d'autre part, que $g(h)$ est *toujours fonction continue de* h. C'est une conséquence de l'hypothèse faite sur la sommabilité de $|f(x)|$, c'est-à-dire sur l'existence des quantités de métal, et cela implique que :

$$\text{(I,1,16)} \qquad \int |f(x+h) - f(x)|^2 \, dx = 2\,[g(0) - g(h)]$$

tend vers 0 lorsque $|h|$ tend vers zéro. On énonce ce résultat en disant que $f(x)$ *est continue en moyenne quadratique.*

Réciproquement, d'ailleurs, si $f(x)$ est continue en moyenne quadratique, (I,1-16) montre que $g(h)$ est continue à l'origine, et, comme $g(h)$ est de type positif, cela suffit à garantir que $g(h)$ est partout continue.

Du point de vue pratique, cependant, le fait que le covariogramme soit toujours continu, et $f(x)$ toujours continue en moyenne quadratique, sous l'hypothèse que $|f(x)|$ est sommable, ne doit pas faire illusion. Il est des continuités qui équivalent — expérimentalement et dans les applications pratiques — à une parfaite discontinuité. On peut toujours trouver η telle que $|h| \leqslant \eta$ entraîne $|g(0) - g(h)| \leqslant \varepsilon$, mais il se peut que ce nombre η soit extrêmement petit à l'échelle de l'homme. Dans le cas, cité plus haut, d'une teneur ponctuelle $f(x)$ dans un gisement minier, les distances η à partir desquelles se manifeste la continuité du $g(h)$ sont de l'ordre de grandeur des dimensions granulométriques, soit quelques millimètres au plus. A l'échelle de l'homme, c'est-à-dire, par exemple, pour η de l'ordre de quelques mètres, on observe une totale discontinuité [aussi bien pour $g(h)$ que pour $f(x)$].

On voit ainsi apparaître un type de covariogramme, important dans les applications pratiques, se comportant pratiquement d'une manière discontinue à l'origine, et correspondant à des variables régionalisées à haut degré d'irrégularité. De tels covariogrammes sont dits présenter *un effet de pépite à l'origine* (1). En réalité, il n'y a pas discontinuité véritable, mais une zone de transition très rapide où le $g(h)$ décroît extrêmement vite de part et d'autre de $g(0)$. La dimension de cette zone de transition, *ou portée de l'effet de pépite*, est très petite : dans l'exemple cité plus haut, elle est de l'ordre du diamètre moyen des grains de minerai. Au-delà de cette portée, le $g(h)$ prend une décroissance plus modérée. Dans les applications pratiques — (et les données expérimentalement disponibles ne permettent pas, en général, de faire autrement) — on représente le covariogramme par une courbe régulière $g_1(h)$ extrapolant cette tendance modérée jusqu'en $h = 0$, et on introduit une *constante de pépite* C définie par :

$$C = g(0) - g_1(0)$$

où $g(0) = \int |f(x)|^2 \, dx$ est connu expérimentalement, et où $g_1(0)$ s'obtient en extrapolant la courbe régulière $g_1(h)$. On a ainsi :

$$(I,1,17) \qquad \begin{cases} g(h) = g_1(h) & \text{pour} \quad h \neq 0. \\ g(0) = g_1(0) + C \end{cases}$$

C'est avec le covariogramme ainsi schématisé que l'on doit, par exemple, calculer une variance d'estimation (voir chap. IV) en présence d'effet de pépite.

Mentionnons, pour terminer, que les *anisotropies* du covariogramme, décelables expérimentalement, permettent de mettre en évidence et de caractériser des directions préférentielles, ou des rubannements, qui auraient pu échapper à une étude directe de la variable elle-même.

(1) Cette terminologie, d'origine minière, évoque le comportement, particulièrement erratique, des gisements d'or pépitique. La notion d'effet de pépite sera présentée, de manière plus rigoureuse, au chapitre III.

2. — Variable à support non ponctuel, et régularisation des variables.

Très souvent, on ne dispose pas expérimentalement des valeurs de la variable ponctuelle $f(x)$ elle-même, mais seulement des valeurs moyennes de cette variable dans des volumes v ayant leurs centres de gravité aux points $x_1, x_2, \ldots$, correspondant aux points où ont été prélevés des échantillons de volume v. De tels prélèvements définissent une nouvelle variable régionalisée, différente de $f(x)$, et dont les caractéristiques dépendent de la taille et de la forme du prélèvement v. Cette nouvelle variable sera dite *régularisée* de $f(x)$ par v, et l'on s'attend bien, en effet, à ce qu'elle soit plus régulière dans sa variations patiale que $f(x)$ elle-même. Le volume v sera dit *support géométrique* de la variable régularisée par v, $f(x)$ elle-même étant parfois appelée *variable à support ponctuel.*

On peut définir deux variables régionalisées de support v :

$$\text{(I,2,1)} \qquad \begin{cases} t(x) = \dfrac{1}{v} \displaystyle\int_v f(x+h)\, dh \\ q(x) = \displaystyle\int_v f(x+h)\, dh. \end{cases}$$

Dans cette écriture, l'intégration se fait relativement à l'argument vectoriel h, dont l'extrémité balaye le volume v centré en $x = 0$. La première variable, $t(x)$, représente la valeur moyenne de $f(x)$ dans le volume v centré en x. Dans la terminologie minière, c'est *la teneur moyenne de l'échantillon v prélevé au point x.* Elle n'est définie que si le volume v est borné. La deuxième, au contraire, $q(x) = vt(x)$ représente *la quantité de métal* contenu dans ce même échantillon, et se trouve définie même si v n'est pas borné, puisque $|f(x)|$ est sommable.

Plus généralement, on peut définir une teneur moyenne et une quantité de métal généralisées (ou pondérées) associées à une fonction de pondération $p(h)$. On écrira, par exemple :

$$\text{(I,2,2)} \qquad \begin{cases} q(x) = \displaystyle\int f(x+h)\, p(h)\, dh \\ t(x) = \dfrac{1}{p} \displaystyle\int f(x+h) p(h)\, dh \\ p = \displaystyle\int p(h)\, dh \end{cases}$$

$q(x)$ et $t(x)$ seront dites des *régularisées* de $f(x)$ *par la fonction de pondération* $p(h)$. On prendra parfois pour $p(h)$ une fonction identiquement nulle à l'extérieur d'un volume v centré à l'origine. Dans d'autres cas, $p(h)$ pourra ne pas avoir un support borné, sous réserve naturellement de vérifier des conditions convenables de sommabilité.

D'ailleurs (I,2,1) apparaît comme un cas particulier de (I,2,2). En introduisant la variable géométrique $k(x)$ associée au volume v centré à l'origine, (I,2,1) s'écrit, en effet :

$$\text{(I,2,3)} \qquad \begin{cases} t(x) = \dfrac{1}{v} \displaystyle\int f(x+h)\, k(h)\, dh, \\ q(x) = \displaystyle\int f(x+h) k(h)\, dh. \end{cases}$$

Dans ce cas particulier, la fonction de pondération $k(h)$ est dite aussi *fonction de prélèvement.*

Pour développer le symbolisme transitif, il est utile de mettre ces diverses expressions sous la forme de produits de convolution. En changeant h en $h - x$, et en introduisant la transposée $\check{p}(h) = p(-h)$, on trouve facilement :

$$\int f(x+h)p(h)\, dh = \int f(h)\check{p}(x-h)\, dh = f * \check{p}.$$

D'où l'écriture symbolique cherchée, équivalente à (I,2,2)

$$\text{(I,2,4)} \qquad \begin{cases} q(x) = f * \check{p} \\ t(x) = \dfrac{1}{p} f * \check{p} \end{cases}$$

En comparant (I,2,4) avec (I,1,3), on voit que le covariogramme $g(h)$ peut être interprété comme la quantité de métal généralisée associée à une fonction de pondération identique à la variable $f(x)$ elle-même : le covariogramme est l'auto-régularisée d'une variable régionalisée. Dans le cas particulier d'une variable géométrique $k(x)$, on retrouve ainsi (I,1,5). Dans ce cas, en effet, $K(h)$ représente la mesure de ce que l'on obtient en prélevant dans V « un échantillon » égal à V mais translaté dans la translation h — c'est-à-dire la mesure de l'intersection de V et de son translaté.

Covariogramme de la variable régularisée. — Désignons, par exemple, par $g_q(h)$ le covariogramme de $q(x)$. Il est donné, par une application immédiate de (I,1,3), sous la forme :

$$g_q = f * \check{p} * \check{f} * p = f * \check{f} * p * \check{p}.$$

En tenant compte des propriétés d'associativité et de commutativité du produit de convolution, et en désignant par

$$P(h) = p * \check{p}$$

le covariogramme associé à la fonction de pondération p, on obtient le résultat remarquable suivant :

$$\text{(I,2,5)} \qquad g_q = g * P.$$

Le covariogramme de la quantité de métal associée à une fonction de pondération p s'obtient en régularisant le covariogramme g de la variable ponctuelle par le covariogramme P de la fonction de prélèvement. Dans le cas d'une fonction de prélèvement $k(x)$, on remplace P par le covariogramme géométrique $K = k * \check{k}$ associé à $k(x)$.

De même, pour la teneur moyenne $t(x)$ associée à p, on obtient le covariogramme

$$g_t = \frac{1}{p^2} g * P. \qquad (I,2,6)$$

On voit ce qu'il faut entendre par régularisation : si, par exemple, la fonction de prélèvement p admet des dérivées premières (ou même si elle est seulement dérivable en moyenne quadratique) P est deux fois dérivable. Mais alors, d'après la règle de dérivation des produits convolutifs, g_q ou g_t sont également deux fois dérivables, et $q(x)$ et $t(x)$ sont dérivables en moyenne quadratique, même si $f(x)$ ne l'était pas : P transmet à g_q et g_t ses propres caractères de régularité. Cette régularisation sera étudiée beaucoup plus en détail, dans les deux derniers paragraphes de ce chapitre et dans les deux chapitres suivants :

La valeur à l'origine $g_t(0)$ du covariogramme régularisé s'écrit

$$g_t(0) = \frac{1}{p^2} \int g(u)\, P(u)\, du. \qquad (I,2,7)$$

En remplaçant $P(u)$ par $p * \check{p}$, puis en changeant u en $u - v$, il vient :

$$g_t(0) = \frac{1}{p^2} \iint g(u)\, p(v)\, p(u+v)\, du\, dv = \frac{1}{p^2} \iint g(u-v)\, p(u)\, p(v)\, du\, dv.$$

Prenant $h = u - v$, on voit que cette expression représente la valeur moyenne de $g(h)$, lorsque les extrémités v et u du vecteur h balayent l'espace, pondérée par $p(u)$ et $p(v)$. Comme on a toujours, selon (I,1,10), $g(h) \leqslant g(0)$ on a aussi

$$g_t(0) \leqslant g(0)$$

et ceci est une autre manifestation de la régularisation.

Dans le cas particulier d'une fonction de prélèvement k, de covariogramme géométrique K, correspondant à un prélèvement v de volume $K(0) = v$, la relation précédente s'écrit

$$g_t(0) = \frac{1}{v^2} \int g(h)\, K(h)\, dh = \frac{1}{v^2} \iint g(x-y)\, k(x)\, k(y)\, dx\, dy. \qquad (I,2,8)$$

Ainsi $g_t(0)$ représente la valeur moyenne de $g(h)$ lorsque les deux extrémités x et y de h balayent, chacune pour leur compte, le volume v.

Cette relation constitue *l'algorithme de Cauchy* qui nous sera utile dans la suite. Elle s'applique, naturellement, à une fonction $F(h)$ quelconque, et se démontre de la même manière : l'intégrale d'ordre $2n$ donnant la

valeur moyenne de $F(h)$, lorsque les extrémités x et y du vecteur h balayent un volume v, se ramène ainsi à une intégrale d'ordre n seulement, où figure le covariogramme géométrique $K(h)$ du volume v :

$$(I,2,9) \qquad \frac{1}{v^2}\int_v\int_v F(x-y)\,dx\,dy = \frac{1}{v^2}\int F(h)\,K(h)\,dh.$$

De la même manière, on obtient

$$(I,2,10) \quad g_t(h) = \frac{1}{v^2}\int g(h+u)K(u)\,du = \frac{1}{v^2}\int_v\int_v g(h+x-y)\,dx\,dy$$

La valeur de $g_t(h)$ apparaît comme la valeur moyenne de $g(h')$, lorsque les deux extrémités du vecteur h' balayent, chacune pour son compte, deux volumes v_1 et v_2 égaux à v et translatées l'un de l'autre par la translation h.

Quantité de métal associée à la variable régularisée. — Pour des raisons de cohérence, il est souhaitable que la quantité de métal Q_t

$$Q_t = \int t(x)\,dx$$

associée à la variable régularisée $t(x)$ coïncide avec la quantité Q, associée en (I,1,11) à la variable ponctuelle correspondante. Montrons qu'il en est bien ainsi. Soit $\omega(u)$ et $\varphi(u)$ les transformées de Fourier de la fonction de pondération p et de la variable $f(x)$. On a :

$$\begin{cases} Q = \varphi(0) \\ Q_t = \dfrac{1}{p}\,\omega(0)\,\varphi(0). \end{cases}$$

Mais — puisque $p = \int p(x)\,dx$ — on a justement $\omega(0) = p$, d'où résulte bien

$$(1,2,11) \qquad Q_t = Q.$$

3. — Processus de montée et descente.

Lorsque le volume de prélèvement v n'est pas borné, la teneur

$$t(x) = \frac{1}{v} f * \overset{\vee}{k}$$

s'évanouit, mais la quantité $q(x) = f * \overset{\vee}{k}$ reste parfaitement définie. A la limite, le volume illimité v peut se réduire à une droite, à un plan (ou à un hyperplan si l'on a plus de trois dimensions), et rien n'empêche de définir les variables régionalisées à $n-1$, $n-2$... dimensions, définies comme les quantités de métal portées par des droites, des plans... parallèles.

Pour préciser cette notion, désignons par $f_n(x_1 \ldots x_{n-1}, x_n)$ la valeur de la variable régionalisée à n dimensions au point de coordonnées

$$(x_1 \ldots x_{n-1}, x_n).$$

La variable à $n - 1$ dimensions, définies par l'intégrale :

$$(1,3,1) \qquad f_{n-1}(x_1, \ldots x_{n-1}) = \int f_n(x_1 \ldots x_{n-1}, x_n)\, dx_n$$

représente les quantités de métal portées par les droites parallèles à l'axe des x_n. De même, la variable à n-2 dimensions, définie par l'intégrale :

$$(I,3,2) \qquad f_{n-2}(x_1 \ldots x_{n-2}) = \int f_{n-1}(x_1 \ldots x_{n-1})\, dx_{n-1}$$
$$= \iint f_n(x_1 \ldots x_{n-1}x_n)\, dx_{n-1}\, dx_n$$

représente les quantités de métal portées par les plans parallèles aux axes des x_n et des x_{n-1}. L'opération (I,3,1), qui fait passer de f_n à f_{n-1}, sera désignée comme une *montée d'ordre* 1 effectuée le long de l'axe des x_n. De même, l'opération (I,3,2) peut être considérée soit comme une montée d'ordre 1, le long de l'axe des x_{n-1}, faisant passer de f_{n-1}, à f_{n-2}, soit comme une *montée d'ordre* 2 dans le plan des $x_n x_{n-1}$, faisant passer directement de f_n à f_{n-2}. Dans des espaces à plus de 3 dimensions, on définira de même des montées d'ordre 3, 4, etc. Pour effectuer une montée le long d'un axe, ou d'un plan, non parallèle à un axe ou un plan de coordonnées, il suffit naturellement d'effectuer une rotation convenable sur le système des axes de coordonnées.

La montée prend une signification très concrète, dans le cas d'une variable à 3 dimensions $f_3(xyz)$ représentant une teneur dans un gisement minier (teneur exprimée en quantité de métal par unité de volume). L'axe des z étant supposé vertical, la variable

$$f_2(xy) = \int f_3(xyz)\, dz$$

représente la quantité de métal par unité de surface, ou accumulation, portée par un sondage vertical implanté au point de coordonnée (xy). La montée verticale fait passer de la variable f_3, teneur volumétrique à 3 dimensions, à la variable f_2 à 2 dimensions, ou accumulation. De même, la variable à une dimension.

$$f_1(z) = \iint f_3(xyz)\, dx\, dy$$

représente la quantité de métal au mètre d'approfondissement porté par un niveau de cote z.

On conçoit que les teneurs volumétriques soient moins régulières, dans leur variation spatiale, que les accumulations des sondages verticaux, elles-mêmes moins régulières que les tonnages de métal au mètre d'approfondissement. L'étude détaillée, qui sera faite, de ce processus de régularisation

à la montée présente donc un intérêt pratique certain. De plus, elle aura le mérite d'éclairer, sur un exemple précis, le phénomène général de la régularisation.

L'opération de montée se formule de manière particulièrement simple, à l'aide de la transformation de Fourier. Désignons, en effet, par

$$\varphi_n(u_1, \ldots u_{n-1}, u_n), \qquad \varphi_{n-1}(u_1, \ldots u_{n-1}) \qquad \text{et} \qquad \varphi_{n-2}(u_1 \ldots u_{n-2}),$$

respectivement, les transformées de Fourier de $f_n(x_1 \ldots x_n)$ et des variables $f_{n-1}(x_1, \ldots x_{n-1})$ et $f_{n-2}(x_1 \ldots x_{n-2})$, qui s'en déduisent par montée d'ordre 1 et 2 conformément à (I,3,1) et (I,3,2). On obtient immédiatement :

$$\text{(I,3,3)} \quad \begin{cases} \varphi_{n-1}(u_1 \ldots u_{n-1}) = \varphi_n(u_1 \ldots u_{n-1}, 0) \\ \varphi_{n-2}(u_1 \ldots u_{n-2}) = \varphi_{n-1}(u_1 \ldots u_{n-2}, 0) = \varphi_n(u_1 \ldots u_{n-2}, 0, 0). \end{cases}$$

L'opération de montée le long de l'axe des x_n se manifeste par l'annulation de la coordonnée u_n de la transformée de Fourier, conformément à un mécanisme bien connu, en calcul des Probabilités, dans le passage d'une loi de répartition à une loi marginale. Plus généralement, la montée le long d'une droite, d'un plan... quelconques se traduirait par une, deux.... relations linéaires homogènes entre les coordonnées u_i. Nous n'insisterons pas ici sur l'algèbre de la montée. Remarquons seulement que, d'après (I,3,2), les montées le long de deux axes perpendiculaires constituent des opérations commutatives, dont le produit donne la montée d'ordre 2 dans le plan de ces deux axes : cela se voit, plus commodément encore, sur (I,3,3).

L'opération inverse de la montée, ou descente, est étroitement liée au problème de Radon [1] qui consiste à déterminer une fonction, connaissant la valeur de son intégrale sur toutes les droites, ou tous les plans... de l'espace. Nous n'aborderons ce problème, dans le paragraphe suivant, que dans le cas particulier des fonctions isotropes, d'ailleurs suffisant pour les applications pratiques, et permettant de mettre en évidence les propriétés essentielles des opérations de montée et de descente.

Montée sur les covariogrammes. — Désignons par g_n, g_{n-1}, g_{n-2}... les covariogrammes à n, $n-1$, $n-2$... dimensions associés aux variables f_n, f_{n-1}, f_{n-2} introduites en (I,3,1) et (I,3,2) et par G_n, G_{n-1}, G_{n-2} leurs transformées de Fourier. Des relations de définition

$$\begin{cases} g_n = f_n * \check{f}_n \\ g_{n-1} = f_{n-1} * \check{f}_{n-1} \\ g_{n-2} = f_{n-2} * \check{f}_{n-2} \end{cases}$$

on tire immédiatement, en tenant compte de (I,3,3)

$$\begin{cases} G_n(u_1 \ldots u_n) = |\varphi_n(u_1 \ldots u_n)|^2 \\ G_{n-1}(u_1 \ldots u_{n-1}) = |\varphi_{n-1}(u_1 \ldots u_{n-1})|^2 = |\varphi_n(u_1 \ldots u_{n-1}, 0)|^2 \\ G_{n-2}(u_1 \ldots u_{n-2}) = |\varphi_{n-2}(u_1 \ldots u_{n-2})|^2 = |\varphi_n(u_1 \ldots u_{n-2}, 0, 0)|^2 \end{cases}$$

[1] Le problème de Radon est traité dans Guelfand et Chilov *Les Distributions*, Paris, Dunod, 1962. Voir aussi Guelfand et Igraiev, *Integralnaïa geometria*, Moscou, 1962.

Par suite, on a :

$$(I,3,4) \qquad \begin{cases} G_{n-1}(u_1 \ldots u_{n-1}) = G_n(u_1 \ldots u_{n-1}, 0) \\ G_{n-2}(u_1 \ldots u_{n-2}) = G_n(u_1 \ldots u_{n-2}, 0, 0). \end{cases}$$

En comparant à (I,3,3), on conclut que le covariogramme associé à la nouvelle variable obtenue après une montée peut s'obtenir en effectuant directement la même montée sur le covariogramme de la variable primitive. Montée et passage au covariogramme sont des opérations permutables. Nous dirons, brièvement, que *le covariogramme monte et descend en même temps que la variable à laquelle il est associé.*

4. — Montée et descente en clavier isotrope.

On dira que la variable régionalisée $f_n(x)$ à n dimensions obéit à un *schéma transitif isotrope* si le covariogramme transitif $g_n(h)$, qui lui est associé, ne dépend pas de la direction de l'argument vectoriel h, mais seulement de son module, que nous désignerons par r

$$(I,4,1) \qquad r = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}.$$

On écrira $g_n(r)$, au lieu de $g_n(h)$, l'indice n devant rappeler que $g_n(r)$, bien qu'elle ne dépende que de la seule variable r, est en réalité une fonction définie sur un espace à n dimensions.

Dans les applications, on utilisera presque exclusivement des schémas isotropes, soit que les régionalisations présentent réellement un degré suffisant d'isotropie, soit que l'on puisse se ramener à ce cas simple par une transformation linéaire convenable des coordonnées (affinité géométrique). Les schémas isotropes nous permettront, dans les deux chapitres suivants, de mettre en évidence le phénomène de régularisation à la montée, un $g(r)$ se comportant en r^λ au voisinage de l'origine donnant, par montées successives, des covariogrammes en $r^{\lambda+1}$, $r^{\lambda+2}$..., sauf dans le cas particulier où λ est un entier impair. Dans ce dernier cas, on observera la séquence r, $r^2 \log r$, r^3, $r^4 \log r$.

Effet rectangulaire. — En dehors du cas isotrope, cependant, on peut imaginer des covariogrammes qui ne se régularisent pas à la montée. Par exemple, si un covariogramme à 3 dimensions est de la forme :

$$g_3(xyz) = g(x)\, g(y)\, g(z)$$

on obtiendra, par montées d'ordre 1 et 2, les covariogrammes :

$$\begin{cases} g_2(xy) = A\, g(x)\, g(y) \\ g_1(z) = A^2 g(z) \\ A = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, du \end{cases}$$

qui présentent, à l'origine, le même comportement que g_3 lui-même.

Un tel effet peut exister dans la nature, sous forme plus ou moins atténuée, comme on s'en rend compte en imaginant le cas limite de la variable géométrique $k(x)$ associée au cube de côté unité. Dans ce cas, on a

$$\begin{cases} K(xyz) = (1 - |x|)(1 - |y|)(1 - |z|) & \text{pour } \begin{cases} |x| \leqslant 1 \\ |y| \leqslant 1 \\ |z| \leqslant 1 \end{cases} \\ K(xyz) = 0 & \text{pour tous les autres cas.} \end{cases}$$

A la montée, on obtient $(1 - |x|)(1 - |y|)$ et $(1 - |z|)$. Les puissances des sondages verticaux, ou les surfaces des sections horizontales varient, dans les espaces à 2 et 1 dimensions, avec exactement le même degré d'irrégularité que $k(xyz)$ elle-même dans l'espace à 3 dimensions. Les phénomènes de cette nature seront désignés sous le nom *d'effet rectangulaire.* Bien qu'un tel effet puisse parfois se manifester, la plupart des phénomènes naturels pourront être étudiés à partir de schémas isotropes, ou se ramenant à des schémas isotropes.

Étude de la montée isotrope par la transformation de Hankel. — La montée isotrope peut s'étudier soit directement, soit à partir des relations (I,3,3). Nous examinerons, en premier lieu, la méthode fondée sur la transformation de Fourier. Comme $g_n(r)$ possède la symétrie sphérique, il en est de même de sa transformée, qui peut se mettre sous la forme $G(\rho)$, avec :

$$(I,4,2) \qquad \rho = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}.$$

On sait (Annexe A,8,1) que $G(\rho)$ admet l'expression suivante :

$$(I,4,3) \qquad G(\rho) = \mathcal{F} g_n(r) = 2\pi\rho^{1-\frac{n}{2}} \int_0^\infty r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi\rho r) g_n(r)\, dr.$$

J_λ désignant la fonction classique de Bessel d'indice λ. La formule (I,4,3) représente la transformation de Fourier dans l'espace à n dimensions, lorsque g_n et G sont considérées comme des fonctions isotropes définies sur cet espace. Si g_n et G sont considérées comme fonction d'une seule variable (r ou ρ), la même formule représente la transformation de Hankel d'ordre n, et peut se généraliser, ainsi que la formule réciproque, à des valeurs non entières de n.

Le processus de montée le long de l'axe des x_n (il donne évidemment la même fonction isotrope le long de n'importe quel axe), se représente, d'après (I,3,3), en annulant la coordonnée u_n de la transformée de Fourier du covariogramme. Celle-ci $G(\rho)$, ne dépend que de ρ. Or, en annulant u_n dans (I,4,2), on obtient simplement le même ρ, considéré comme rayon vecteur de l'espace à $n - 1$ dimensions. Par suite, le covariogramme g_{n-1} déduit de g_n par montée d'ordre 1 a, dans son espace à $n - 1$ dimensions, une transformée de Fourier $G(\rho)$, qui, en tant que fonction de la variable ρ, ne se distingue pas de la transformée $G(\rho)$ de g_n, prise dans son espace à n dimensions.

Ainsi, en schéma isotrope, *une montée, ou une descente, d'ordre quelconque*, le long d'une droite, d'un plan... d'orientation quelconque, *laisse invariante la transformée de Fourier* $G(\rho)$ *du covariogramme.* Nous écrirons :

$$(I,4,4) \qquad G(\rho) = \mathcal{F}_n g_n = \mathcal{F}_{n-1} g_{n-1} = \cdots = \mathcal{F}_{n-k} g_{n-k}.$$

L'inversion de la transformation de Fourier donne immédiatement l'expression du covariogramme obtenu par montée d'ordre k

$$(I,4,5) \quad g_{n-k}(r) = \mathcal{F}_{n-k} G(\rho) = 2\pi r^{1-\frac{(n-k)}{2}} \int_0^\infty \rho^{\frac{n-k}{2}} J_{\frac{n-k}{2}}(2\pi\rho r) G(\rho)\, d\rho$$

Cette formule donne la solution théorique du problème de montée et descente en schéma isotrope, une fois connue la fonction $G(\rho)$. Pour descendre, il suffit naturellement de donner à k une valeur entière négative. Comme les transformations de Hankel se généralisent aux indices non entiers ou demi-entiers, on peut même imaginer des montées ou descentes d'ordre quelconque (non entier).

Plus généralement, la donnée de la fonction $G(\rho)$ permet de définir un *clavier isotrope* de covariogrammes $g_\lambda(r)$, dépendant continûment d'un paramètre λ, définis par la relation

$$(I,4,6) \quad g_\lambda(r) = \mathcal{F}_\lambda G(\rho) = 2\pi r^{1-\frac{\lambda}{2}} \int_0^\infty \rho^{\frac{\lambda}{2}} G(\rho) J_{\frac{\lambda}{2}-1}(2\pi\rho r)\, d\rho.$$

Le jeu du processus de montée et de descente permet de décrire tout le clavier des g_λ, une montée d'ordre μ, par exemple, faisant passer de g_λ à $g_{\lambda-\mu}$, tandis que la transformée de Hankel

$$\mathcal{F}_\lambda g_\lambda = \mathcal{F}_{\lambda-\mu} g_{\lambda-\mu} = G(\rho)$$

reste invariante. Notons bien que l'ordre de cette transformation doit être pris égal à l'indice λ (la transformée de Fourier de g_λ doit être prise dans l'espace à λ dimensions auquel appartient g_λ). Si on effectue une transformation d'indice α quelconque, mais fixe, nous verrons que $\mathcal{F}_\alpha g_\lambda$ descend quand g_λ monte, et réciproquement.

Étude directe de la montée. — Dans le cas d'une fonction isotrope $g_n(r)$, les expressions directes (I,3,1) et (I,3,2) des montées d'ordre 1 et 2 se mettent sous la forme suivante :

$$(I,4,7) \qquad \begin{cases} g_{n-1}(r) = 2\displaystyle\int_0^\infty g_n\left(\sqrt{r^2+x^2}\right) dx \\ g_{n-2}(r) = 2\pi\displaystyle\int_0^\infty g_n\left(\sqrt{r^2+\rho^2}\right) \rho\, d\rho \end{cases}$$

L'expression de g_{n-2} est obtenue en passant en coordonnées polaires dans le plan des (x_n, x_{n-1}). Par le changement de variable

$$u = \sqrt{r^2+\rho^2}$$

on obtient immédiatement :

$$g_{n-2}(r) = 2\pi \int_r^\infty u g_n(u)\, du. \tag{I,4,8}$$

On voit que la montée d'ordre 2 (et, plus généralement, toute montée d'ordre pair) se ramène à une intégration ordinaire. L'opération réciproque, la descente d'ordre pair, s'effectue au moyen de simples dérivations. Par exemple, en dérivant (I,4,8) en r, on obtient l'expression de la descente d'ordre 2 :

$$g_n(r) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d}{dr} g_{n-2}(r). \tag{I,4,9}$$

Au contraire, les montées d'ordre impair sont des opérations plus difficiles. La descente d'ordre 1, en particulier, ne peut pas s'exprimer à l'aide de dérivations élémentaires. Cette circonstance n'est pas fortuite. Prenons, en effet, comme nouvelle variable

$$y = r^2 \tag{I,4,10}$$

et considérons les $g_k(r)$ comme des fonctions $g_k(\sqrt{y})$ de cette nouvelle variable.

Les deux équations (I,4,7) se mettent (moyennant les changements de variables $\rho = y + x^2$ et $\rho = y + \rho^2$) sous la forme :

$$\begin{cases} g_{n-1}(\sqrt{y}) = \displaystyle\int_y^\infty g_n(\sqrt{\rho})\, \frac{d\rho}{\sqrt{\rho - y}} \\ g_{n-2}(\sqrt{y}) = \pi \displaystyle\int_y^\infty g_n(\sqrt{\rho})\, d\rho. \end{cases} \tag{I,4,11}$$

La deuxième expression est une simple intégration de $g_n(\sqrt{u})$, tandis que la première se présente comme le produit de convolution

$$g_{n-1}(\sqrt{y}) = g_n(\sqrt{y}) * \mathrm{T}(y) \tag{I,4,12}$$

de $g_n(\sqrt{y})$ par la fonction $\mathrm{T}(y)$ définie comme suit :

$$\begin{cases} \mathrm{T}(y) = |y|^{-\frac{1}{2}} & \text{pour } y < 0 \\ \mathrm{T}(y) = 0 & \text{pour } y > 0. \end{cases}$$

Cette fonction $\mathrm{T}(y)$ apparaît comme très proche de l'opérateur $\mathrm{Y}_{\frac{1}{2}}$ qui représente, en théorie des distributions, l'intégration d'ordre $\frac{1}{2}$ (Annexe A,7). On a, en effet,

$$\mathrm{Y}_{\frac{1}{2}}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{T}(-y).$$

Remplacer $\mathrm{T}(y)$ par $\mathrm{Y}_{\frac{1}{2}}(y)$ dans le produit de convolution (I,4,12) reviendrait à remplacer la première intégrale de (I,4,11) par :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y g_n(\sqrt{\rho})\, \frac{d\rho}{\sqrt{y - \rho}}$$

c'est-à-dire, pratiquement, à effectuer l'intégration de 0 à y, et non plus de y à l'infini. Comme le produit d'un nombre pair d'intégrations d'ordre $\frac{1}{2}$ est une intégration d'ordre entier, il n'est pas étonnant que la montée d'ordre pair conduise à des résultats simples. Introduisons alors les fonctions [1] $F_\lambda(y)$ définies par :

$$\text{(I,4,13)} \qquad \begin{cases} F_\lambda(y) = \dfrac{|y|^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} & \text{pour } y < 0 \\ F_\lambda(y) = 0 & \text{pour } y > 0. \end{cases}$$

$\Gamma(\lambda)$ désignant la fonction eulérienne (Annexe B). On montre aisément (Annexe A,7,1) que le produit de convolution de F_λ par F_μ est $F_{\lambda+\mu}$:

$$\text{(I,4,14)} \qquad F_\lambda * F_\mu = F_{\lambda+\mu}.$$

Comme la montée d'ordre 1 se représente par le produit de convolution

$$g_{n-1}(\sqrt{y}) = \sqrt{\pi}\, g_n(\sqrt{y}) * F_{\frac{1}{2}}(y)$$

la relation (I,4,14) permet d'écrire la montée d'ordre k sous la forme :

$$\text{(I,4,15)} \qquad g_{n-k}(\sqrt{y}) = \pi^{\frac{k}{2}} g_n(\sqrt{y}) * F_{\frac{k}{2}}(y).$$

Pour $k = 0$, on retombe sur la fonction $g_n(\sqrt{y})$ elle-même [2], et pour k entier pair on retombe sur des intégrations ordinaires. De même, la descente d'ordre k s'obtient en changeant k en $-k$

$$g_{n+k}(\sqrt{y}) = \pi^{-\frac{k}{2}} g_n(\sqrt{y}) * F_{-\frac{k}{2}}(y).$$

En effet, la montée d'ordre k effectuée sur un tel g_{n+k} redonne bien g_n [3].

Enfin, la montée d'ordre μ quelconque (entier ou non, positif ou négatif) s'obtient en remplaçant k par μ. Tous les covariogrammes g_λ, appartenant à un même clavier, tels que nous les avons définis en (I,4,6), peuvent se déduire de l'un quelconque d'entre eux par des processus de montée ou descente, représentés par des produits de convolution :

$$\text{(I,4,16)} \qquad g_\lambda(\sqrt{y}) = \pi^{\frac{\mu}{2}} g_{\lambda+\mu}(\sqrt{y}) * F_{\frac{\mu}{2}}(y)$$

[1] En réalité, lorsque la partie réelle de λ est négative ou nulle, F_λ est une distribution d'ailleurs égale à la transposée de Y_λ définie en (A,5). Les relations que nous allons écrire n'ont un sens, pour toutes les valeurs de λ, que si les g_n et les F_λ sont des distributions, Dans les applications, les valeurs de λ sont telles qu'elles conservent leurs sens si g_n et F_λ sont des fonctions.

[2] F_0 est la distribution de Dirac δ (Annexe A, 5).

[3] Car $F_{-\frac{k}{2}} * F_{\frac{k}{2}} = F_0 = \delta$.

où, en revenant à des notations explicites :

$$(I,4,17) \qquad g_\lambda(\sqrt{y}) = \frac{\pi^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \int_y^\infty g_{\lambda+\mu}(\sqrt{v})(v-y)^{\frac{\mu}{2}-1}\, dv.$$

Enfin, réintroduisant la variable primitive $r^2 = y$, et changeant v en u^2, nous trouvons l'expression de la montée d'ordre μ sous la forme suivante :

$$(I,4,18) \qquad g_\lambda(r) = \frac{2\pi^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \int_r^\infty g_{\lambda+\mu}(u)(u^2-r^2)^{\frac{\mu}{2}-1}\, u\, du.$$

Dans un processus de descente (μ négatif), il pourrait arriver qu'une intégrale telle que (I,4,18) soit divergente (au sens usuel). On pourra, en général, éviter le recours à la théorie des distributions en descendant d'abord d'un entier $2k \geqslant \mu$, opération qui n'introduit que des dérivations ordinaires, et en effectuant ensuite la montée d'ordre positif $2k - \mu$.

Par exemple, la montée d'ordre 1 :

$$g_{n-1}(r) = 2\int_r^\infty g_n(u) \frac{u}{\sqrt{u^2-r^2}}\, du$$

admet comme réciproque *la descente d'ordre* 1 *:*

$$(I,4,19) \qquad g_n(r) = -\frac{1}{\pi}\int_r^\infty g'_{n-1}(u) \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}.$$

Une telle relation s'interprète comme une descente d'ordre 2, qui conduit, selon (I,4,9) à $g_{n+1} = -\frac{1}{2\pi u} g'_{n-1}(u)$, suivie d'une remontée d'ordre 1.

Choix d'un clavier isotrope. — Les opérations effectuées ci-dessus ont un caractère formel, et ne préjugent en rien de la capacité des covariogrammes g_λ obtenus à représenter convenablement la variable régionalisée correspondant à tel ou tel phénomène naturel. Seule, une connaissance directe du phénomène naturel lui-même peut permettre d'en juger. Dans le choix d'un « modèle » théorique de covariogramme, on ne devra pas seulement chercher une interpolation aussi bonne que possible du covariogramme expérimental, construit par points discontinus selon les données disponibles. On devra aussi attacher une extrême importance au comportement du $g(r)$ au voisinage de l'origine. Même dans les cas où ce comportement n'est pas suffisamment mis en évidence par les données expérimentales, on pourra, en général, avoir des notions à priori assez précises sur sa nature analytique, grâce aux connaissances qualitatives que l'on pourra posséder, par ailleurs, sur le phénomène représenté. Naturellement, en pareille matière, l'expérience reste juge souverain et pourra seule décider si tel ou tel type de comportement convient bien à tel ou tel type de variable.

Cependant, *les covariogrammes utilisés devront toujours être de type positif*. Cette condition est impérative, si l'on ne veut pas s'exposer à tomber un jour sur une variance d'estimation négative. A cet égard, il est important de noter que, *pour que tous les covariogrammes* g_λ *d'un clavier isotrope soient de type positif, il suffit qu'un seul d'entre eux le soit.* Cela résulte immédiatement de la relation (I,4,4) et du théorème de Bochner (Annexe A,9,1). Pour qu'un g_λ soit de type positif, il faut et il suffit que sa transformée de Fourier $G(\rho)$, prise dans son espace à λ dimensions soit une fonction non négative (plus généralement, une mesure positive). Comme tous les g_μ ont même transformée $G(\rho)$, dans leurs espaces respectifs à μ dimensions, ils sont tous de type positif si un seul d'entre eux l'est.

5. — Clavier réciproque et groupe de Hankel.

L'opération de montée d'ordre μ, telle qu'elle est définie en (I,4,18), peut être symbolisée par un opérateur M_μ. Par définition (I,4,18) s'écrit alors :

$$g_\lambda = M_\mu g_{\lambda+\mu}. \qquad \text{(I,5,1)}$$

Mais cette même opération peut également s'exprimer, à l'aide de (I,4,6), grâce aux transformations de Hankel $\mathcal{F}_\alpha$, qui sont ainsi en relation étroite avec les M_μ. La relation (I,4,6) se symbolise par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} G = \mathcal{F}_{\lambda+\mu}\, g_{\lambda+\mu} \\ g_\lambda = \mathcal{F}_\lambda G \end{cases}$$

Il en résulte la relation :

$$g_\lambda = \mathcal{F}_\lambda \mathcal{F}_{\lambda+\mu}\, g_{\lambda+\mu}. \qquad \text{(I,5,2)}$$

En comparant (I,5,1) et (I,5,2) nous obtenons une relation entre opérateurs :

$$M_\mu = \mathcal{F}_\lambda \mathcal{F}_{\lambda+\mu}$$

que nous écrirons, en changeant λ en α et μ en $\beta - \alpha$, sous la forme suivante :

$$M_{\beta-\alpha} = \mathcal{F}_\alpha \mathcal{F}_\beta. \qquad \text{(I,5,3)}$$

Le produit des transformations de Hankel d'ordre α et β est égal à la montée d'ordre $\beta - \alpha$. Il faut bien préciser que l'opérateur $\mathcal{F}_\alpha \mathcal{F}_\beta$, agissant sur une fonction f, représente ce que l'on obtient en effectuant en premier lieu $\mathcal{F}_\beta$, f, et en faisant agir ensuite $\mathcal{F}_\alpha$ sur le résultat obtenu.

Pour $\alpha = \beta$, en particulier, on obtient :

$$M_0 = \mathcal{F}_\alpha \mathcal{F}_\alpha. \qquad \text{(I,5,4)}$$

Comme la montée d'ordre zéro est l'opérateur unité ($M_0 f = f$), cette relation traduit simplement la réciprocité de la transformation de Hankel $\mathcal{F}_\alpha$.

Considérons maintenant $G = \mathcal{F}_\lambda g_\lambda$ comme l'élément G_0 d'un nouveau clavier, que nous appellerons *clavier réciproque* des g_λ. L'élément général G_μ de ce clavier s'obtient, par définition, en effectuant la montée d'ordre $-\mu$ sur G_0.

$$G_\mu = M_{-\mu} G_0. \tag{I,5,5}$$

Dans ces conditions, faisons agir les deux membres de (I,5,3) sur G_0

$$M_{\beta-\alpha} G_0 = \mathcal{F}_\alpha \mathcal{F}_\beta G_0.$$

A gauche, nous obtenons $G_{\alpha-\beta}$, d'après (I,5,5). A droite, nous pouvons remplacer $\mathcal{F}_\beta G_0$ par g_β, d'après (1,4,6). Il vient ainsi :

$$G_{\alpha-\beta} = \mathcal{F}_\alpha g_\beta. \tag{I,5,6}$$

En multipliant à gauche les deux membres de (I,5,6) par $\mathcal{F}_\alpha$, on obtient encore :

$$\mathcal{F}_\alpha G_{\alpha-\beta} = g_\beta$$

soit, en changeant les notations

$$g_{\alpha-\beta} = \mathcal{F}_\alpha G_\beta. \tag{I,5,7}$$

Les deux relations réciproques (I,5,6) et (I,5,7) associent étroitement les deux claviers g et G. On peut les établir directement par le calcul, en utilisant la formule (A,8,30) de l'Annexe A, donnant la transformée de Hankel de la fonction Besselienne $r^{-\mu} J_\mu(r)$. Elles justifient le nom de claviers réciproques. De (I,5,6), par exemple, on déduit qu'une montée d'ordre λ effectuée sur g_β, qui a pour effet de changer β en $\beta - \lambda$, a pour réciproque, α restant constant, une descente de même ordre λ effectuée sur $G_{\alpha-\beta}$, qui devient $G_{\alpha-\beta+\lambda}$.

Remarque. — Le clavier réciproque des G_λ ne convient pas nécessairement à la représentation d'un phénomène réel. Par exemple, si les g_μ sont de type positif, il n'en résulte nullement que les G_λ le soient également. Nous en verrons des exemples. Pour que les deux claviers réciproques g_μ et G_λ soient tous deux de type positif, il est nécessaire et suffisant, d'après le théorème de Bochner (Annexe A,9,1) que l'un au moins des g_μ et l'un au moins des G_λ soient des fonctions non négatives ou des mesures positives. Nous verrons également, dans le chapitre suivant, des exemples de claviers vérifiant cette condition.

Le groupe de Hankel. — D'un point de vue purement formel (c'est-à-dire sans se préoccuper de la nature des fonctions ou des distributions sur lesquelles agissent les opérateurs introduits symboliquement) il est intéressant de préciser la structure algébrique de l'ensemble de transformations constitué par les montées, les descentes ,et les transformations de Hankel.

Nous allons voir que cet ensemble est un groupe, que nous appellerons le groupe de Hankel.

Considérons d'abord l'ensemble des montées M_μ. Le produit de deux montées est une montée, d'après (I,1,14), et on a :

$$M_\lambda M_\mu = M_{\lambda+\mu} = M_\mu M_\lambda \qquad \text{(I,5,8)}$$

de sorte que le produit, évidemment associatif, est, de plus, commutatif. Il existe un élément unité, la montée d'ordre 0, M_0, et chaque élément M_λ a un inverse $M_{-\lambda}$

$$M_\lambda M_{-\lambda} = M_0. \qquad \text{(I,5,9)}$$

Ainsi, l'ensemble des montées constitue un groupe, d'ailleurs abélien (commutatif).

Considérons maintenant l'ensemble H constitué par le groupe des montées, et les transformations de Hankel $\mathcal{F}$. Le produit de deux montées est une montée, selon (I,5,8). Le produit de deux transformations de Hankel est une montée, d'après (I,5,3).

Multiplions cette dernière relation à droite par $\mathcal{F}_\beta$. Il vient :

$$M_{\beta-\alpha}\mathcal{F}_\beta = \mathcal{F}_\alpha.$$

De même (le produit étant évidemment associatif) multiplions à gauche par $\mathcal{F}_\alpha$. Il vient :

$$\mathcal{F}_\alpha M_{\beta-\alpha} = \mathcal{F}_\beta.$$

En changeant les notations, ces deux relations s'écrivent :

$$\begin{cases} M_{-\lambda}F_\mu = F_{\mu+\lambda} \\ \mathcal{F}_\lambda M_\mu = \mathcal{F}_{\mu+\lambda}. \end{cases} \qquad \text{(I,5,10)}$$

Elles montrent que le produit d'une montée et d'une transformation de Hankel est une transformation de Hankel. Ainsi le produit de deux éléments de H est un élément de H. D'autre part, il existe un élément neutre M_0, et chaque élément a un inverse :

$$\begin{cases} M_\lambda M_{-\lambda} = M_0 \\ \mathcal{F}_\alpha \mathcal{F}_\alpha = M_0 \end{cases}$$

H est donc bien un groupe, le groupe de Hankel.

Comparons ce groupe au groupe des translations-symétries sur la droite euclidienne. Désignons par $S_{2\beta}$ la symétrie autour du point d'abscisse β, et par T_α la translation de $-\alpha$ (translation vers la gauche). Les propriétés géométriques élémentaires bien connues de ce groupe donnent les règles de calcul suivantes :

$$\begin{cases} T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta} \\ S_\alpha S_\beta = T_{\beta-\alpha} \\ S_\alpha T_\beta = S_{\alpha+\beta} \\ T_\beta^{-} S_\alpha = S_{\alpha+\beta} \end{cases} \qquad \text{(I,5,11)}$$

Si l'on établit une correspondance (application bijective) entre S_α et $\mathcal{F}_\alpha$ et entre T_β et M_β, on voit que les règles (I,5,11) ne diffèrent pas de (I,5,8), (I,5,3) et (I,5,10).

Ainsi *le groupe de Hankel est isomorphe au groupe des symétries-translations* sur la droite euclidienne. Dans cet isomorphisme, les transformations de Hankel correspondent aux symétries, et les montées aux translations. Si le groupe de Hankel est considéré comme opérant sur l'axe des dimensions, une montée M_λ s'interprète comme une translation $-\lambda$ (vers la gauche) le long de cet axe, et une transformation de Hankel $\mathcal{F}_\alpha$ comme une symétrie autour du point $\frac{\alpha}{2}$ de cet axe, symétrie ayant pour effet de faire passer d'un clavier à son réciproque.

***

CHAPITRE II

EXEMPLES DE CLAVIERS ISOTROPES

SOMMAIRE

Ce chapitre est une simple application de la montée isotrope à des claviers particuliers, qui peuvent être utilisés en pratique. Mais son objet principal est de mettre en évidence le phénomène de régularisation à la montée. Dans l'étude du comportement d'un covariogramme $g(r)$ *au voisinage de l'origine, on distingue* une partie régulière *(série entière paire* $\Sigma a_k r^{2k}$*) et une* partie irrégulière, *de la forme* $\sum_{\mu} a_\mu r^\mu$ *(*μ *différent d'un entier pair). Sur chacun des exemples étudiés, on montre que* la montée peut se faire terme à terme sur la partie irrégulière, selon la règle

$$M_\lambda \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^\mu = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(-\frac{\mu+\lambda}{2}\right) r^{\lambda+\mu},$$

à condition de remplacer $\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^\mu$ *par un terme en* $r^{2k} \log r$ *lorsque* μ *est un entier pair* $2k$*. La série logarithmique:* $\log r \to \pi r \to -\pi r^2 \log r \to \cdots$ *obtenue par montées successives d'ordre 1, est fondamentale pour les applications.*

Cette règle de montée terme à terme sur la partie irrégulière s'applique à tous les covariogrammes usuels, mais ne donne le résultat qu'à une série entière près. Celle-ci ne peut être déterminée que par une étude directe de chaque $g(r)$ *particulier.*

La démonstration de la validité générale de cette règle ne sera donnée que dans le chapitre suivant. Nous nous contentons ici de la retrouver sur chacun des claviers étudiés: claviers de Bessel (par. 1), de Gauss (par. 2) de Laguerre (par. 3), claviers hypergéométriques (par. 4) et sphériques (par. 5).

Bien que de nombreux calculs aient été renvoyés en Annexe, ce chapitre reste de lecture difficile. Il n'est pas utile d'avoir approfondi chacun des exrmples traités pour passer aux chapitres suivants. Néanmoins, en raison de l'importance de la régularisation à la montée, et de la règle de montée terme à terme, et aussi pour que le lecteur se persuade que la montée n'est pas une opération élémentaire, nous conseillons de lire au moins le sous-paragraphe I.2 *(claviers de Bessel de* 2e *espèce) avant de passer au chapitre III.*

1. — Les claviers de Bessel.

Nous traiterons rapidement le clavier de première espèce, peu important pour les applications, et beaucoup plus en détail le clavier de deuxième espèce, dont l'importance est très grande aussi bien pour les applications que pour la théorie de l'estimation (chap. IV).

1.-1. — Le clavier de Bessel de Première espèce. — Prenons, dans l'espace à n dimensions, un covariogramme $g_n(r)$ défini par :

$$g_n(r) = (cr)^{-\mu} J_\mu(cr) \qquad \text{(II,1,1)}$$

c étant une constante, et J_μ la fonction de Bessel d'indice μ (Annexe C-1). Il a pour transformée de Hankel d'ordre 2 selon la formule (A-8,30) de l'Annexe A :

$$G(\rho) = \mathcal{F}_n g_n = \frac{2^{n-\mu}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\mu-\frac{n}{2}\right)} c^{-n}\left(1-\frac{4\pi^2\rho^2}{c^2}\right)^{\mu-\frac{n}{2}}.$$

La montée d'ordre λ s'effectue, selon (I,4,5) en appliquant à G la transformation d'ordre $n-\lambda$. Par application de (A,8,29) de l'Annexe A, on obtient :

$$g_{n-\lambda} = \mathcal{F}_{n-\lambda} G = C^{-\lambda}(2\pi)^{\frac{\lambda}{2}} (cr)^{\frac{\lambda}{2}-\mu} J_{\mu-\frac{\lambda}{2}}(cr). \qquad \text{(II,1,2)}$$

Ainsi, à un facteur constant près, la montée d'ordre λ se manifeste par le changement de l'indice μ en $\mu-\frac{\lambda}{2}$. L'application de la définition directe (I,4,18), de son côté, conduit à l'expression :

$$g_{n-\lambda} = \frac{2\pi^{\frac{\lambda}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \int_r^\infty g_n(u)\,(u^2-r^2)^{\frac{\lambda}{2}-1}\,u\,du. \qquad \text{(II,1,3)}$$

En égalant (II,1,2) et (II,1,3), on retrouve une intégrale classique de Sonine :

$$\int_r^\infty (cr)^{-\mu} J_\mu(cr)\,(u^2-r^2)^{\frac{\lambda}{2}-1}\,u\,du = \frac{2^{\frac{\lambda}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{c^\lambda} (cr)^{\frac{\lambda}{2}-\mu} J_{\mu-\frac{\lambda}{2}}(cr).$$

Le clavier de Bessel de première espèce est bien de type positif, puisque ses transformées sont de la forme $\left(1-\frac{4\pi^2}{c^2}\rho^2\right)^\mu$, donc positive. Ses covariogrammes, qui sont tous des séries entières paires, sont cependant beaucoup trop réguliers à l'origine pour être utiles dans les applications.

Le clavier réciproque est constitué de fonctions de la forme $\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{\mu}$, sur lesquelles la montée d'ordre λ se manifeste par le changement de μ en $\mu+\frac{\lambda}{2}$, conformément à la règle (I,5,6). Mais ces fonctions ne sont pas de type positif, car leurs transformées, qui sont les $\rho^{-\mu}\,J_{\mu}$, prennent des valeurs négatives. Elles ne peuvent donc pas servir de covariogramme.

1.-2. — Le clavier de Bessel de 2e espèce. — Les fonctions de Bessel modifiées de 2e espèce, prises sous la forme $x^{\mu}K_{-\mu}(x)$ (voir Annexe C,2), sont beaucoup mieux adaptées aux usages pratiques. Toujours positives, et décroissant à l'infini comme des exponentielles, elles présentent à l'origine une gamme de comportements extrêmement variés.

Prenons comme covariogramme de départ, dans un espace à n dimensions, la fonction

$$g_n(r) = c^{\mu} r^{\mu} K_{-\mu}(cr). \tag{II,1,4}$$

Elle a pour transformée de Hankel d'ordre n, d'après (A,8,30), la fonction :

$$G(\rho) = 2^{n-1+\mu}\pi^{\frac{n}{2}}\,c^{-n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\mu\right)\frac{1}{\left(1+\frac{4\pi^2}{c^2}\rho^2\right)^{\mu+\frac{n}{2}}}. \tag{II,1,5}$$

Pour effectuer la montée d'ordre λ, on doit, selon (I,4,5) calculer $\mathcal{F}_{n-\lambda}\,G$, ce qui se fait aisément à l'aide de la formule (A,8,27) de l'Annexe A. On obtient :

$$g_{n-\lambda}(r) = \frac{(2\pi)^{\frac{\lambda}{2}}}{c^{\lambda}}\,(cr)^{\mu+\frac{\lambda}{2}}\,K_{-\mu-\frac{\lambda}{2}}(cr). \tag{II,1,6}$$

Ainsi, au facteur $(2\pi)^{\frac{\lambda}{2}}\,c^{-\lambda}$ près, *la montée d'ordre* λ *s'effectue en remplaçant, dans* (II,1,4), *l'indice* μ *par* $\mu+\frac{\lambda}{2}$.

Par exemple, prenons $\mu = 0$. On obtient, comme point de départ, la fonction K_0 dont le développement est donné en (6,2,4). Par des montées d'ordre 1 effectuées successivement, on décrit la gamme suivante :

$$\left\{\begin{aligned} g_n &= K_0(cr)\\ g_{n-1} &= \frac{\sqrt{2\pi}}{c}\sqrt{cr}\,K_{-\frac{1}{2}}(cr) = \frac{\pi}{c}\,e^{-cr}\\ g_{n-2} &= \frac{2\pi}{c^2}\,(cr)\,K_{-1}(cr)\\ g_{n-3} &= \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{c^3}\,(cr)^{\frac{3}{2}}\,K_{-\frac{3}{2}}(cr) = \frac{2\pi^2}{c^3}\,e^{-cr}\,(1+cr). \end{aligned}\right. \tag{II,1,7}$$

Ainsi, à $g_n = K_0$, dont le comportement à l'origine est logarithmique, succède g_{n-1}, qui est l'exponentielle, linéaire à l'origine, puis g_{n-2}, qui est en $r^2 \log r$ etc...

Plus généralement, la formule (II,1,6) permet de saisir sur le vif le processus de *régularisation à la montée*. Le développement de g_n est donné, dans le cas général (μ non entier) par la formule (6,2,3) de l'Annexe C. Il comporte une partie régulière, qui est une série entière paire en r^{2k}, et une partie irrégulière comportant des termes en $r^{2\mu+2k}$. La partie régulière ne doit pas être prise en considération. Si elle existait seule, le covariogramme, indéfiniment dérivable à l'origine, ne pourrait décrire qu'une variable $f(x)$ elle-même indéfiniment dérivable. C'est donc la partie irrégulière, seule, qui représente le comportement de la variable $f(x)$, et son aventure à la montée doit mettre en évidence le phénomène de régularisation. Considérons, d'abord, le terme le plus irrégulier, qui est en $r^{2\mu}(k = 0)$. Il est égal à :

$$- (cr)^{2\mu} \frac{2^{-1-\mu}}{\Gamma(1+\mu)} \frac{\pi}{\sin \mu\pi}$$

La montée d'ordre λ donne $g_{n-\lambda}$ par la formule (II,1,6). Si $\mu + \frac{\lambda}{2}$ n'est pas non plus un entier, le même développement (C,2,3) nous donne son terme le plus irrégulier. Il est en $r^{2\mu+\lambda}$, et a pour expression exacte :

$$- \frac{(cr)^{2\mu+\lambda}}{c^{\lambda}} \frac{2^{-1-\mu}}{\Gamma\left(1+\mu+\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{\pi^{1+\frac{\lambda}{2}}}{\sin\left(\mu+\frac{\lambda}{2}\right)\pi}.$$

En comparant ces deux expressions, on obtient la règle suivante : Si μ et $\mu + \frac{\lambda}{2}$ ne sont ni l'un ni l'autre des entiers, un terme en $r^{2\mu}$ donne, à la montée d'ordre λ, un terme en $r^{2\mu+\lambda}$, selon la formule :

$$\text{(II,1,8)} \quad M_\lambda r^{2\mu} = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma\left(1+\mu+\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{\sin \mu\pi}{\sin\left(\mu+\frac{\lambda}{2}\right)\pi} r^{2\mu+\lambda}$$

On vérifie facilement, à l'aide du développement (C,2,3) que cette règle (II,1,8) ne s'applique pas seulement au terme le plus irrégulier, mais au terme général de la partie irrégulière (il suffit de remplacer 2μ par $2\mu + 2k$). Ainsi *la montée peut s'effectuer terme à terme sur la partie irrégulière*. Par contre, la partie régulière ne peut pas être manipulée de manière aussi simple, mais, comme nous l'avons vu, elle ne présente aucune importance dans l'étude du comportement à l'origine. On remarquera, d'ailleurs, que si l'on prend $2\mu = 2k$ entier pair, et λ quelconque, le deuxième membre de (II,1,8) s'annule. Et, en effet, un terme « régulier » en r^{2k} ne peut pas donner, à la montée, de terme irrégulier en $r^{2k+\lambda}$. On conclut que la montée sur $r^{2\mu}$ n'est donnée, par (II,1,8), qu'*à une série entière paire près*, dont l'expression exacte nous est d'ailleurs indifférente.

Changeant μ en $\frac{\mu}{2}$, et utilisant la formule des compléments (B, 6), nous mettons la règle (II,1,8) sous la forme plus simple suivante :

$$\text{(II,1,9)} \qquad \mathrm{M}_\lambda \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^\mu = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(-\frac{\mu+\lambda}{2}\right) r^{\mu+\lambda}.$$

Il reste à examiner les cas d'exceptions, qui apparaissent lorsque, dans (II,1,4), μ ou $\mu + \frac{\lambda}{2}$ est un entier. Si μ est un entier m, le terme le plus irrégulier de g_n est en $x^{2m} \log x$. Son expression exacte est donnée par le développement (C,2,5), soit, en prenant la constante c égale à l'unité :

$$(-1)^{m+1} \frac{2^{-m}}{m!} r^{2m} \log r$$

de même, si $\mu + \frac{\lambda}{2}$ est un entier p, le terme le plus irrégulier de $g_{n-\lambda}$ est :

$$(-1)^{p+1} (2\pi)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{2^{-p}}{p!} r^{2p} \log r.$$

Prenons, par exemple, les autres cas se traitant de manière analogue, μ quelconque (non entier) et $\mu + \frac{\lambda}{2} = p$ entier, c'est-à-dire une montée d'ordre :

$$\lambda = 2(p - \mu).$$

Nous obtenons :

$$-\mathrm{M}_\lambda r^{2\mu} \frac{2^{-1-\mu}\pi}{\Gamma(1+\mu)\sin \mu\pi} = (-1)^{p+1} \frac{2^{-\mu}\pi^{p-\mu}}{p!} r^{2p} \log r$$

Utilisons à nouveau la formule des compléments, et changeons μ en $\frac{\mu}{2}$. La règle (II,1,9) est remplacée par la suivante :

$$\text{(II,1,10)} \qquad \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{M}_\lambda \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^\mu = \frac{(-1)^{p+1}}{p!} 2\pi^{\frac{\lambda}{2}} r^{2p} \log r \\ \lambda = 2p - \mu \end{array} \right.$$

Les autres cas se traitent de manière semblable. La règle (II,1,9) reste valable dans tous les cas, à condition de remplacer $\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) r^\alpha$ par $(-1)^{p+1} \frac{2}{p!} r^{2p} \log r$ lorsque $\alpha = 2p$ est un entier pair. Nous poserons donc une règle d'équivalence, que nous écrirons symboliquement :

$$\text{(II,1,11)} \qquad \Gamma(-p) r^{2p} \equiv (-1)^{p+1} \frac{2}{p!} r^{2p} \log r.$$

Ainsi complétée, la règle (II,1,9) s'applique dans tous les cas. On vérifie facilement qu'elle permet d'effectuer la montée terme à terme sur la partie irrégulière de g_n.

La formule (II,1,11) peut se retrouver par un raisonnement plus rapide. La règle (II,1,9) donne, en effet, la montée de $\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^{\mu}$ à une série entière paire près. Toujours à une série entière près, $(r^{\mu} - r^{2p})$ monte de la même manière que r^{μ} lui-même. Cherchons la limite de

$$\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)[r^{\mu} - r^{2p}]$$

lorsque μ tend vers l'entier pair $2p$. Posons :

$$\mu = 2p + 2\varepsilon.$$

On trouve, pour $\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)$

$$\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) = \frac{\pi}{\Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)\sin \mu \frac{\pi}{2}} = \frac{(-1)^{p+1}\pi}{\Gamma(p + 1 + \varepsilon)\sin \varepsilon\pi}$$

$$= \frac{(-1)^{p+1}}{\varepsilon p\,!}\left[1 - \varepsilon \frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)} + \cdots\right]$$

de même, on a :

$$r^{\mu} - r^{2p} = r^{2p}(2\varepsilon \log r + \cdots).$$

Lorsque ε tend vers 0, on obtient la limite cherchée, qui coïncide avec (II,1,11)

$$\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)[r^{\mu} - r^{2p}] \to \frac{(-1)^{p+1}}{p\,!} 2r^{2p} \log r.$$

Dans les applications, on aura a effectuer des montées successives d'ordre 1. On obtiendra soit la séquence normale (μ non entier)

$$\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^{\mu} \to \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{\mu}{2} - 1\right) r^{\mu+1} \to \cdots$$

soit, le plus souvent, *la série exceptionnelle* (μ entier), qui fait alterner les termes impairs r^{2k-1} et les termes logarithmiques $r^{2k} \log r$. En raison de son importance, nous l'écrirons explicitement :

$$\text{(II,1,12)} \quad \begin{cases} \log r \to \pi\, r \to -\pi r^2 \log r \\ r^{2k-1} \to -2^{1-2k}\dfrac{(2k)\,!}{(k\,!)^2} r^{2k} \log r \to \dfrac{-2\pi}{2k+1} r^{2k+1} \to \cdots \\ r^{2k} \log r \to \pi \dfrac{2^{2k}(k\,!)^2}{(2k+1)\,!} r^{2k+1} \to -\dfrac{\pi}{k+1} r^{2k+2} \log r \to \cdots \end{cases}$$

La règle de montée terme à terme sur la partie irrégulière, et les séquences obtenues pour le clavier de Bessel, se retrouvent identiquement pour tous les autres claviers étudiés dans ce chapitre, et nous montrerons au chapitre suivant qu'elles ont une portée générale. On n'oubliera pas, cependant, qu'elle ne donne le résultat qu'à une série entière paire près. La partie régulière d'un covariogramme, sans importance pour le comportement

de la variable régionalisée, ni, nous le verrons, pour le calcul d'une variance d'estimation, est néanmoins indispensable si l'on veut construire graphiquement $g_{n-\lambda}$, pour le comparer par exemple à une courbe expérimentale. Elle ne peut être obtenue que par étude directe de chaque covariogramme particulier, et il n'existe pas, à son sujet, de règle générale simple.

Clavier réciproque. — Le clavier réciproque, construit sur le $G(\rho)$ de la formule (II,1,5) est du type $\frac{1}{(1+\rho^2)^\lambda}$. La montée d'ordre μ change λ en $\lambda - \frac{\mu}{2}$. Comme $G(\rho)$ est positif, le théorème de Bochner de l'Annexe A,9,1 montre que le clavier de Bessel est de type positif, comme il se doit. Inversement, les fonctions $x^\mu K_\mu$ sont positives, de sorte que le clavier réciproque est, lui aussi, de type positif. Mais ce clavier réciproque, trop régulier à l'origine, et décroissant trop lentement à l'infini, ne peut convenir aux applications pratiques.

Remarque. — Si nous comparons le résultat (II,1,6) de la montée dans le clavier de Bessel avec la définition directe (I,4,18) qui s'écrit :

$$(II,1,13) \qquad g_{n-\lambda} = 2\frac{\pi^{\frac{\lambda}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \int_r^\infty g_n(u)\,(u^2 - r^2)^{\frac{\lambda}{2}-1}\, u\, du$$

nous obtenons les relations remarquables suivantes [1] :

(II,1,14)

$$(cr)^{\mu+\frac{\lambda}{2}} K_{-\mu-\frac{\lambda}{2}}(cr) = \frac{2^{1-\frac{\lambda}{2}} C^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \int_r^\infty (cu)^\mu K_{-\mu}(cu)(u^2 - r^2)^{\frac{\lambda}{2}-1}\, u\, du.$$

Changement u en $r\varrho$, nous obtenons le résultat équivalent

(II,1,15)

$$(cr)^{\mu+\frac{\lambda}{2}} K_{-\mu-\frac{\lambda}{2}}(cr) = \frac{2^{1-\frac{\lambda}{2}}(cr)^{\mu+\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \int_1^\infty \varrho^\mu K_{-\mu}(c\varrho r)\,(\varrho^2 - 1)^{\frac{\lambda}{2}-1}\, \varrho\, d\varrho.$$

Si nous faisons $\mu = -\frac{1}{2}$ et $c = 1$, dans cette dernière relation, nous obtenons, compte tenu de (C,2,6) :

$$(II,1,16) \quad r^{-\nu} K_\nu(r) = \frac{2^{-\nu}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)} \int_1^\infty e^{-\nu r}(\varrho^2 - 1)^{\nu-\frac{1}{2}}\, d\varrho$$

avec, comme cas particulier, l'expression (C,2,9) de K_0.

[1] On comparera avec les résultats analogues obtenus par Guelfand (*op. cit.*) pour les fonctions de première espèce J_λ et l'intégration d'ordre non entier.

2. — Clavier et représentation de Gauss.

Le clavier de Gauss est défini à partir de l'exponentielle

$$g_n(r) = e^{-ar^2} = e^{-a(x_1^2 + \cdots + x_n)}. \tag{II,2,1}$$

C'est le seul clavier isotrope présentant, à la montée, l'effet rectangulaire à l'état pur. Le $g_n(r)$ a pour transformée de Fourier, d'après (A,8,20), la fonction :

$$G(\rho) = \mathcal{F}_n g_n = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\rho^2} \tag{II,2,2}$$

qui est elle-même une exponentielle gaussienne : en particulier, nous voyons que le clavier de Gauss et son réciproque sont de type positif. La montée d'ordre λ s'obtient en effectuant la transformation de Hankel d'ordre $n - \lambda$. On trouve :

$$g_{n-\lambda}(r) = \mathcal{F}_{n-\lambda}\, G = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{\lambda}{2}} e^{-ar^2}. \tag{II,2,3}$$

Ainsi la montée d'ordre λ se traduit par une simple multiplication par le facteur $\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{\lambda}{2}}$.

Ce clavier est trop régulier à l'origine pour être utile dans les applications pratiques. Mais l'expression (II,2,3) remarquablement simple de la montée peut être utilisée, indirectement, par l'intermédiaire des *représentations de Gauss*. Supposons que l'élément g_n d'un clavier admette une représentation intégrale de la forme :

$$g_n(r) = \int_0^\infty e^{-ur^2} f(u)\, du.$$

Dans ce cas, la montée d'ordre λ se met, d'après (II,2,3), sous la forme suivante, qui est aussi une représentation gaussienne :

$$g_{n-\lambda}(r) = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \int_0^\infty e^{-ur^2} \frac{f(u)}{u^{\frac{\lambda}{2}}}\, du. \tag{II,2,4}$$

De même, la transformation de Hankel d'ordre α donnera :

$$\mathcal{F}_\alpha g_{n-\lambda} = \pi^{\frac{\lambda+\alpha}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi^2\rho^2}{u}} u^{-\frac{\alpha+\lambda}{2}} f(u)\, du \tag{II,2,5}$$

soit, en changeant u en $\frac{\pi^2}{u}$

$$\mathcal{F}_\alpha g_{n-\lambda} = \pi^{-\frac{\lambda+\alpha}{2}+2} \int_0^\infty e^{-u\rho^2} u^{\frac{\alpha+\lambda}{2}-2} f\left(\frac{\pi^2}{u}\right) du \tag{II,2,6}$$

ce qui est encore une représentation de Gauss. Si $f(u)$ est une fonction non négative, le clavier défini en (II,2,4) et son réciproque (II,2,6) seront tous deux de type positif.

Exemple :

A titre d'application, prenons, dans (II,2,4) la fonction

$$f(u) = \frac{c^{2\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u^{\beta-1} e^{-c^2 u} \tag{II,2,7}$$

avec des constantes c et β arbitraires. En appliquant (B, 1), on trouve :

$$\begin{cases} g_n(r) = \dfrac{c^{2\beta-1}}{(r^2+c^2)^{\beta}} \\ g_{n-\lambda}(r) = \pi^{\lambda/2} \dfrac{\Gamma\left(\beta - \dfrac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\beta)} \dfrac{c^{2\beta-1}}{(r^2+c^2)^{\beta-\frac{\lambda}{2}}} \end{cases} \tag{II,2,8}$$

Prenons la transformée de Hankel d'ordre 1 de g_n. On a directement, d'après (A,8,27) :

$$\mathcal{F}_1 g_n = 2\frac{\pi^{\beta}}{\Gamma(\beta)} (c\rho)^{\beta-\frac{1}{2}} \mathrm{K}_{-\beta+\frac{1}{2}}(2\pi c\rho)$$

et, sous la forme (II,2,5)

$$\mathcal{F}_1 g_n = \frac{\pi^{2\beta-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\beta)} c^{2\beta-1} \int_0^{\infty} e^{-u\rho^2 - \frac{c^2\pi^2}{u}} \frac{1}{u^{\beta+\frac{1}{2}}} du.$$

Égalons ces deux expressions, en posant $\mu = \beta - \dfrac{1}{2}$ et $2\pi c = b$. On obtient :

$$(b\rho)^{\mu} \mathrm{K}_{-\mu}(b\rho) = b^{2\mu} 2^{-1-\mu} \int_0^{\infty} \exp\left(-u\rho^2 - \frac{b^2}{4u}\right) \frac{du}{u^{\mu+1}}. \tag{II,2,9}$$

On retrouve ainsi la représentation de Sonine-Schläfli des fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce (C, 2,8).

3. — Le Clavier de Laguerre.

3.-1. — Clavier de Laguerre de première espèce. — Le clavier de Laguerre de première espèce est défini à partir du covariogramme :

(II,3,1)

$$g_n(r) = \mathrm{F}(\alpha, \gamma, -r^2) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 e^{-ur^2} u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} du$$

La fonction de Laguerre $\mathrm{F}(\alpha, \gamma, x)$ et sa représentation intégrale sont données en Annexe D, formules (D,1) et (D,3). Le covariogramme g_n, étant sous la forme d'une représentation de Gauss, est de type positif,

et la formule (II,2,4) permet d'écrire immédiatement l'expression de la montée d'ordre λ

$$(II,3,2)\quad g_{n-\lambda}(r) = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma\left(\gamma - \frac{\lambda}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} F\left(\alpha - \frac{\lambda}{2},\ \gamma - \frac{\lambda}{2},\ -r^2\right).$$

Ainsi, la montée d'ordre λ s'effectue, à un facteur près, en changeant α et γ en $\alpha - \frac{\lambda}{2}$ et $\gamma - \frac{\lambda}{2}$. Ce clavier est cependant trop régulier à l'origine pour être utilisé dans les applications.

Le clavier réciproque, lui aussi de type positif, présente à l'origine une gamme de comportements beaucoup plus intéressante. On l'obtient en prenant la transformée de Hankel d'ordre μ de (II,3,1), soit selon (II,2,5) :

(II,3,3)

$$\begin{cases} \mathcal{F}_\mu g_n = \pi^{\frac{\mu}{2}} \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)} \displaystyle\int_0^1 \exp\left(-\frac{\pi^2\rho^2}{u}\right) u^{-\frac{\mu}{2}+\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1}\, du \\ \qquad = \pi^{\frac{\mu}{2}} \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)} \displaystyle\int_1^\infty \exp\left(-u\pi^2\rho^2\right) u^{\frac{\mu}{2}-\gamma} (u-1)^{\gamma-\alpha-1}\, du \end{cases}$$

3.-2. — Le Clavier de Laguerre de 2e espèce. — Le clavier de Laguerre de 2e espèce est le réciproque du précédent. Nous le définirons, en modifiant légèrement les notations de (II,3,3), à partir du covariogramme.

$$(II,3,4)\quad g_n(r) = \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_1^\infty e^{-uc^2r^2} u^{\alpha-1} (u-1)^{\gamma-\alpha-1}\, du.$$

La montée s'effectue facilement, puisque g_n est sous la forme d'une représentation de Gauss :

$$(II,3,5)\quad g_{n-\lambda}(r) = \frac{\pi^{\frac{\lambda}{2}} c^{-\lambda}}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_1^\infty e^{-uc^2r^2} u^{\alpha-1-\frac{\lambda}{2}} (u-1)^{\gamma-\alpha-1}\, du.$$

En comparant avec les formules (D,7) et (D,8) de l'Annexe D, on met en évidence la partie régulière et la partie irrégulière de ce covariogramme. On trouve :

$$(II,3,6)\quad \begin{cases} g_{n-\lambda} = \pi^{\frac{\lambda}{2}} c^{-\lambda} L\left(\alpha - \frac{\lambda}{2},\ \gamma - \frac{\lambda}{2},\ c^2r^2\right) \\ \qquad = \dfrac{\pi^{\frac{\lambda}{2}}}{c^\lambda} \dfrac{\Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{2} - \gamma\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{2} - \alpha\right)} F\left(\alpha - \frac{\lambda}{2},\ \gamma - \frac{\lambda}{2},\ -c^2r^2\right) \\ \qquad + \dfrac{\pi^{\frac{\lambda}{2}}}{c^\lambda} (c^2r^2)^{1+\frac{\lambda}{2}-\gamma} F\left(1 - \gamma + \alpha,\ 2 + \frac{\lambda}{2} - \gamma,\ -c^2r^2\right) \end{cases}$$

et on voit qu'au facteur près $\pi^{\frac{\lambda}{2}} c^{-\lambda}$, la montée s'effectue simplement en remplaçant α et γ par $\alpha - \frac{\lambda}{2}$ et $\gamma - \frac{\lambda}{2}$ dans la fonction $L(\alpha, \gamma, c^2r^2)$.

En particulier, selon la formule (D,11), la montée d'ordre

$$\lambda = 2(\alpha - 1)$$

donne le résultat simple

$$(II,3,7) \qquad g_{n-2(\alpha-1)} = \pi^{\alpha-1} c^{2(1-\alpha)} (c^2r^2)^{\alpha-\gamma} e^{-c^2r^2}.$$

Ainsi, le clavier tout entier peut être engendré par des montées effectuées sur $(c^2r^2)^{\alpha-\gamma} \exp(-c^2r^2)$. On vérifiera facilement que la montée d'ordre $\lambda - 2(\alpha - 1)$, effectuée sur cette fonction, donne de $g_{n-\lambda}$ une deuxième expression, qui n'est autre que la représentation intégrale (D,10), et permet de retrouver la formule (D,9) de transformation des fonctions L.

On peut voir aussi, sur la formule (II,3,6), que la règle de montée terme à terme, pour la partie irrégulière, et la formule (II,1,9) s'appliquent exactement. Cette vérification est particulièrement facile dans le cas particulier $\gamma - \alpha - 1 = 0$ (clavier *intégro-exponentiel*). La partie irrégulière se réduit alors, en effet, selon (D,13), au terme unique :

$$\pi^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}\right) (c^2r^2)^{-\alpha+\frac{\lambda}{2}}.$$

La séquence logarithmique (II,1,12) se retrouve également, à l'aide des développements (D,14) ou (D,15), correspondant au cas où $1 - \gamma = p$ est un entier.

4. — Les claviers hypergéométriques.

3.-1. — Les claviers hypergéométriques de 1re *espèce.* — On définit un clavier de première espèce en prenant, comme covariogramme de départ :

$$(II,4,1) \qquad g_n(r) = F(\alpha, \beta, \gamma, -r^2).$$

La fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est définie par la formule (E,1,1) de l'Annexe E. Utilisant la représentation intégrale (E,1,4), on obtient :

$$(II,4,2) \quad g_n(r) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1} (1 + r^2u)^{-\alpha}\, du.$$

C'est une représentation de $g_n(r)$ au moyen de la fonction $(1 + r^2u)^{-\alpha}$, fonction de type positif, en tant que transformée de Hankel d'une fonction

de Bessel du type $r^{\mu}K_{-\mu}$. Le clavier engendré par g_n sera donc, lui aussi, de type positif. Par ailleurs, on vérifie facilement que la montée de

$$(1 + r^2u)^{-\alpha}$$

s'effectue selon la formule :

$$\text{(II,4,3)} \quad M_\lambda(1 + ur^2)^{-\alpha} = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} u^{-\frac{\lambda}{2}} (1 + ur^2)^{\frac{\lambda}{2}-\alpha}.$$

En échangeant les symboles d'intégration et de montée, on en déduit, l'expression de la montée du g_n défini en (II,4,2).

$$\text{(II,4,4)} \quad g_{n-\lambda}(r) = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma\left(\gamma - \frac{\lambda}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\beta - \frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{F}\left(\alpha - \frac{\lambda}{2}, \beta - \frac{\lambda}{2}, \gamma - \frac{\lambda}{2}, -r^2\right).$$

Ainsi, à un facteur près, la montée s'effectue en remplaçant α, β et γ par $\alpha - \frac{\lambda}{2}$, $\beta - \frac{\lambda}{2}$ et $\gamma - \frac{\lambda}{2}$.

Le clavier hypergéométrique est trop régulier à l'origine pour être utile. Son *réciproque*, qui n'est pas hypergéométrique, présente, au contraire, des comportements très variés à l'origine. Pour le définir, prenons la transformée de Hankel d'ordre μ de (II,4,2). En appliquant la formule (A,8,27), sous le signe somme, dans (II,4,2), il vient :

(II,4,5)

$$\mathcal{F}_\mu g_n = \frac{4\pi^\alpha \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma - \beta)} \int_1^\infty \rho^{1+\mu-2\gamma} (\rho^2 - 1)^{\gamma-\beta-1} (\rho\rho)^{\alpha-\frac{\mu}{2}} K_{\frac{\mu}{2}-\alpha}(2\pi\rho\rho)\, d\rho.$$

En faisant $\gamma = \beta$, on retrouve le clavier de Bessel de 2e espèce, dont (II,4,5) constitue une généralisation.

4.-2. — Claviers hypergéométriques de 2e espèce. — On peut définir plusieurs sortes de claviers de deuxième espèce. Celui que nous donnons ci-dessous présente la particularité d'avoir une *portée finie*, que, pour simplifier, nous prenons comme unité de longueur. Tous les covariogrammes $g_{n-\lambda}$ seront identiquement nuls pour $r > 1$. Nous verrons, dans le chapitre consacré à l'estimation, qu'à une portée finie sont liées des anomalies inattendues, connues sous le nom de Zitterbewegung, et dont l'ampleur peut être considérable.

De même que le clavier de Laguerre de deuxième espèce peut s'obtenir, tout entier, par montées, à partir de la fonction $r^{2(\alpha-\gamma)} \exp(-r^2)$, nous

définirons le clavier hypergéométrique de deuxième espèce à partir de la fonction :

$$(\text{II},4,6)\qquad \begin{cases} g_\mu(r) = \pi^{\beta-1}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)}(1-r^2)^{\beta-\gamma}\,r^{2(\gamma-\alpha-1)} & \text{pour } r<1 \\ g_\mu(r) = 0 & \text{pour } r>1 \end{cases}$$

Effectuons la montée directe d'ordre ν :

$$g_{\mu-\nu} = \frac{\pi^{\beta-1+\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)}\int_{r^2}^1 u^{\gamma-\alpha-1}(1-u)^{\beta-\gamma}(u-r^2)^{\frac{\nu}{2}-1}\,du$$

Posant $u = 1-(1-r^2)\rho$, il vient (étant entendu que $g_{\mu-\nu}(r)\equiv 0$ pour $r>1$)

$$g_{\mu-\nu} = \frac{\pi^{\beta-1+\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)}(1-r^2)^{\beta-\gamma+\frac{\nu}{2}}$$
$$\int_0^1 [1-(1-r^2)\rho]^{\gamma-\alpha-1}\rho^{\beta-\gamma}(1-\rho)^{\frac{\nu}{2}-1}\,d\rho$$

Comparons cette expression avec la représentation intégrale (E,1,4) de l'hypergéométrique (Annexe E). On obtient :

$$g_{\mu-\nu} = \pi^{\beta+\frac{\nu}{2}-1}\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma\left(1+\beta-\gamma+\frac{\nu}{2}\right)}(1-r^2)^{\beta-\gamma+\frac{\nu}{2}}$$
$$\mathrm{F}\left(1+\alpha-\gamma,\,1+\beta-\gamma,\,1+\beta-\gamma+\frac{\nu}{2},\,1-r^2\right).$$

Afin de simplifier l'expression obtenue, nous poserons

$$\begin{cases} \mu = n+2(1-\beta) \\ \nu = \lambda+2(1-\beta). \end{cases}$$

Il vient alors :

$$(\text{II},4,7)$$
$$\begin{cases} g_n(r) = (1-r^2)^{1-\gamma}\,\mathrm{F}(1+\alpha-\gamma,\,1+\beta-\gamma,\,2-\gamma,\,1-r^2) \\ g_{n-\lambda}(r) = \dfrac{\pi^{\frac{\lambda}{2}}\,\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma\left(2-\gamma+\frac{\lambda}{2}\right)}(1-r^2)^{1-\gamma+\frac{\lambda}{2}} \\ \qquad\qquad \mathrm{F}\left(1+\alpha-\gamma,\,1+\beta-\gamma,\,2-\gamma+\frac{\lambda}{2},\,1-r^2\right). \end{cases}$$

Prenant l'élément $g_n(r)$ comme élément de base, on voit que la montée d'ordre λ s'effectue, à un facteur près, en remplaçant α, β, et γ par $\alpha-\frac{\lambda}{2}$, $\beta-\frac{\lambda}{2}$ et $\gamma-\frac{\lambda}{2}$. D'autre part, la formule d'échange (E,2,3)

de l'Annexe E permet de séparer facilement la partie irrégulière de ces covariogrammes. On trouve :

(II,4,8)

$$\left\{\begin{aligned} g_{n-\lambda} &= \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma\left(\gamma+\frac{\lambda}{2}-\alpha-\beta\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\beta+\frac{\lambda}{2}\right)} \\ &\qquad F\left(\alpha-\frac{\lambda}{2},\ \beta-\frac{\lambda}{2},\ \alpha+\beta+1-\gamma-\frac{\lambda}{2},\ r^2\right) \\ &+ \pi^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma\left(\alpha+\beta-\gamma-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)\Gamma(1+\beta-\gamma)}\, r^{2(\gamma-\alpha-\beta)+\lambda} \\ &\qquad F\left(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ 1+\gamma+\frac{\lambda}{2}-\alpha-\beta,\ r^2\right). \end{aligned}\right.$$

Cette formule permet de retrouver immédiatement la règle de montée terme à terme sur la partie irrégulière, et son expression précise par la formule (II,1,9). La séquence logarithmique (II,1,12) apparaît dans le cas où $\gamma-\alpha-\beta$ est un entier, et peut s'étudier à l'aide des formules de passage à la limite données en Annexe (E,2,4).

Cas particulier : *Montée pour* r^λ.
Prenons, dans (II,4,6), $\gamma=\beta$. On a :

$$\frac{\pi^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\, g_\mu = r^{2(\beta-\alpha-1)}$$

et posons $\lambda=2(\beta-\alpha-1)$. Les formules ci-dessus donnent la montée d'ordre ν pour la fonction r^λ (plus exactement, il s'agit de la fonction *égale à* r^λ *pour* $r<1$ *et à* 0 *pour* $r>1$) sous la forme suivante :

(II,4,9)

$$M_\nu r^\lambda = \frac{\pi^{-1\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\, g_{\mu-\nu} = \frac{\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)} (1-r^2)^{\frac{\nu}{2}} F\left[-\frac{\lambda}{2},\ 1,\ 1+\frac{\nu}{2},\ 1-r^2\right].$$

Le raccord avec l'axe des r, en $r=1$, est d'ordre $\frac{\nu}{2}$. La formule d'échange, de son côté, permet de séparer parties régulières et irrégulières. Elle donne :

(II,4,10)

$$\left\{\begin{aligned} M_\nu r^\lambda &= \frac{\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{2}{\lambda+\nu} F\left(1-\frac{\nu}{2},\ -\frac{\lambda+\nu}{2},\ 1-\frac{\lambda+\nu}{2},\ r^2\right), \\ &+ \pi^{\frac{\nu}{2}} \frac{\Gamma\left(-\frac{\lambda+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\, r^{\lambda+\nu}. \end{aligned}\right.$$

La partie irrégulière se réduit au terme monome que la règle générale (II,1,9) faisait prévoir. De plus, la partie régulière se trouve, elle aussi, déterminée, mais elle ne concerne que la fonction particulière introduite ici (identiquement nulle pour $r > 1$).

Comme les montées d'ordre 2 se ramènent à des intégrations élémentaires, on aura surtout, dans les applications, à effectuer des *montées d'ordre* 1. C'est pourquoi nous allons étudier plus spécialement le cas $\nu = 1$. Le comportement au voisinage de la portée $(r = 1)$ découle immédiatement de (II,4,9) :

$$\text{(II,4,11)} \qquad \mathrm{M}_1 r^\lambda = 2\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{F}\left(-\frac{\lambda}{2}, 1, \frac{3}{2}, 1-r^2\right).$$

Le comportement à l'origine est donné par (II,4,10), avec $\nu = 1$

(II,4,12)

$$\mathrm{M}_1 r^\lambda = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\,r^{1+\lambda} + \frac{2}{1+\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1-\lambda}\,\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,r^{2n}$$

Lorsque λ est un entier pair positif, il est préférable d'utiliser la formule (II,4,11) qui se réduit dans ce cas au produit d'un polynôme en r^2 par $\sqrt{1-r^2}$. Le cas de $\lambda = 2k-1$ entier impair peut s'étudier à l'aide des formules générales (E,2,4). Il est plus simple d'effectuer le passage à la limite directement sur (II,4,12).

On obtient sans difficulté :

(II,4,13)

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{M}_1 r^{2k-1} = {} & \frac{1}{k} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{r^{2n}}{k-n} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{r^{2n}}{n-k} \\ & - \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\left[2\log\frac{r}{2} + \frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2}{2k-1} \right. \\ & \left. - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{k}\right] r^{2k}.\end{aligned}\right.$$

On peut d'ailleurs, par des intégrations directes, obtenir des formules tout intégrées. Par exemple, on a :

$$\text{(II,4,14)} \quad \mathrm{M}_1 r = 2\int_0^{\sqrt{1-r^2}} (r^2+u^2)^{\frac{1}{2}}\,du = \sqrt{1-r^2} + r^2 \log\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r}.$$

Par intégration par parties, on obtient une formule de récurrence, qui permet de calculer de proche en proche tous les $\mathrm{M}_1 r^{2k-1}$:

$$\text{(II,4,15)} \qquad \mathrm{M}_1 r^{2k+1} = 2\sqrt{1-r^2} + (2k+1)\mathrm{M}_1 r^{2k-1}.$$

Enfin, on calcule $\mathrm{M}_1(r^{2k}\log r)$ en dérivant (II,4,12) en λ et en faisant $\lambda = 2k$ dans l'expression obtenue. Le terme logarithmique disparaît,

puisque $\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$ est infini, et il reste :

$$(II,4,16)\quad M_1(r^{2k}\log r) = \pi\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}r^{1+2k} - \frac{2}{(1+2k)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{1-2n}}{(2n-2k-1)^2}\frac{(2n!)}{(n!)^2}r^{2n}.$$

Remarque. — Pour des valeurs quelconques de α, β et γ, le clavier hypergéométrique n'est pas de type positif, et ne peut pas être utilisé directement. Mais les formules de la montée pour r^λ peuvent servir à effectuer, terme à terme, la montée sur un covariogramme, de type positif, et de portée finie prise comme unité de longueur.

5. — Les claviers sphériques.

Dans l'espace à μ dimensions, considérons une sphère de diamètre unité. Elle a pour volume

$$(II,5,1)\qquad V_\mu = \frac{2^{-\mu}\pi^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{\mu}{2}\right)}.$$

Cherchons à déterminer le covariogramme géométrique $K_\mu = k * \check{k}$, attaché à la variable $k(x)$ égale à 1 dans la sphère, et à zéro à l'extérieur. On sait que $K_\mu(r)$ représente la mesure de l'hypervolume à μ dimensions de l'intersection de cette sphère et de sa translatée dans une translation r de direction quelconque. Au signe près, la dérivée de K_μ représente la mesure de l'hypersphère à $\mu-1$ dimensions, qui constitue le contour apparent de cette intersection. Nous avons donc :

$$-K'_\mu(r) = V_{\mu-1}(1-r^2)^{\frac{\mu-1}{2}}$$

et, en intégrant (compte tenu du fait que $K_\mu(1)=0$)

$$K_\mu(r) = V_{\mu-1}\int_r^1 (1-h^2)^{\frac{\mu-1}{2}}\,dh.$$

Ainsi, K_μ est un cas particulier du clavier hypergéométrique de deuxième espèce. Nous sommes d'ailleurs certains à priori que K_μ est de type positif, à cause de sa signification géométrique même. On obtient facilement les deux expressions suivantes de K_μ :

$$(II,5,2)\quad \begin{cases} K_\mu(r) = \dfrac{\pi^{\frac{\mu-1}{2}}2^{-\mu}}{\Gamma\left(\frac{3+\mu}{2}\right)}(1-r^2)^{\frac{1+\mu}{2}}\,F\left[\frac{1}{2},\frac{1+\mu}{2},\frac{3+\mu}{2},1-r^2\right] \\ \qquad = V_\mu - V_{\mu-1}r\,F\left[\frac{1}{2},\frac{1-\mu}{2},\frac{3}{2},r^2\right]. \end{cases}$$

Les constantes V_μ et $V_{\mu-1}$, sont définies en (II,5,1). Comme il est

normal, $K_\mu(0) = V_\mu$ est le volume de l'hypersphère, et $V_{\mu-1}$ la mesure de l'hypersurface qui constitue le contour apparent de l'hypersphère.

Cas particuliers. — Pour $\mu = 3$ (sphère ordinaire) on a un polynôme.

$$(II,5,3)\quad K(r) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} r + \frac{\pi}{12} r^3 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} r\, F\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}, r^2\right).$$

Pour $\mu = 2$ (cas du cercle), on obtient :

$$(II,5,4)\quad K(r) = \frac{1}{2}\left[\text{Arc cos } r - \sqrt{1-r^2}\right] = \frac{\pi}{4} - r\, F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, r^2\right).$$

Enfin, pour $\mu = 1$ (segment de longueur unité), on trouve :

$$(II,5,5)\qquad K(h) = 1 - |h| = 1 - h\, F\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, h^2\right).$$

Chacun de ces covariogrammes engendre par montées et descentes un clavier particulier, par exemple le clavier sphérique proprement dit ($\mu = 3$), le clavier circulaire ($\mu = 2$) etc... Pour μ impair, les K_μ sont des polynômes, et la montée se fait sans difficulté terme à terme. Si μ est un entier pair, on devra recourir à la formule (E,2,4). Par exemple, le clavier circulaire ($\mu = 2$), défini par son élément :

$$g_2(r) = \frac{\pi}{4} - r\, F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, r^2\right) = \frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1-r^2\right)$$

donne, par montée d'ordre 1

$$g_1(r) = \frac{\pi}{8}(1-r^2)^2 F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3, 1-r^2\right).$$

Ce covariogramme $g_1(r)$ est celui des cordes du cercle de diamètre unité (traversées horizontales). Par application de (E,2,4), il se met sous la forme :

(II,5,6)

$$g_1(r) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!(n+1)!}\left[\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)} + \frac{\Gamma'(2+n)}{\Gamma(2+n)} - \frac{\Gamma'\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} - 2\log r\right] r^{2+2n}$$

$$= \frac{2}{3} + (2\log r + 1 - 4\log 2)\frac{r^2}{2} + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2} + 4\log 2 - 2\log r\right) r^4$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n)!(2n-2)!}{n!(n-1)!} 2^{2-2n}\left[1 + \cdots + \frac{1}{n} + 1 + \cdots + \frac{1}{n+1} + 4\log 2 - 2 - \frac{2}{3} - \cdots - \frac{2}{2n-3} - 2 - \frac{2}{3} - \cdots - \frac{2}{2n-1} - 2\log r\right] r^{2+2n}$$

CHAPITRE III

REPRÉSENTATIONS TRANSITIVES POUR LES DISTRIBUTIONS

SOMMAIRE

Ce chapitre généralise au cas des distributions les résultats obtenus pour les variables régionalisées. Il n'est pas nécessaire à la compréhension du reste de l'ouvrage, (à l'exception du chapitre X, consacré aux distributions aléatoires et à la théorie intrinsèque des distributions) et peut être omis par les lecteurs qui ne connaissent pas la théorie des distributions. Les principes de cette théorie ont été cependant résumés, à leur intention, de manière aussi simple que possible, dans l'Annexe A *de cet ouvrage. Nous leur conseillerons donc, le cas échéant, de parcourir cette Annexe avant de lire le chapitre III.*

Le paragraphe 1 *étend sans difficulté aux distributions à support (champ géométrique) borné le formalisme transitif. La régularisée d'une distribution* T *par une fonction suffisamment régulière* α *est une fonction* $\check{\alpha} * T$, *qui représente une opération de prélèvement. Le covariogramme* $g = T * \check{T}$ *de la distribution se régularise par le covariogramme de la fonction* α. *g est une distribution de type positif. Il monte en même temps que* T *elle-même. L'effet de pépite peut se représenter à l'aide d'une mesure de Dirac* $C\delta(h)$ *ajoutée à un covariogramme continu.*

Le paragraphe 2 *définit les montées et descentes pour les distributions tempérées isotropes à support quelconque. De lecture plus difficile que le paragraphe 1, il dégage la conclusion que les opérations de montée et descente n'agissent pas sur les distributions elles-mêmes, mais seulement sur les classes d'équivalence analytique : le résultat de la montée n'est défini qu'à une série entière paire près, et cela justifie la règle de montée terme à terme, pour la partie irrégulière, règle rencontrée au chapitre précédent.*

Le paragraphe 3 *applique les résultats obtenus à la distribution* r^λ, *et établit la validité générale de la règle* $M_\lambda \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^\mu = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(-\frac{\lambda+\mu}{2}\right) r^{\lambda+\mu}$.

1. — Le symbolisme transitif pour les distributions à support borné.

L'idée de représenter certains phénomènes par des distributions, plutôt que par des fonctions, est souvent suggérée par la pratique elle-même. Le géographe, qui étudie la répartition des densités de population dans un pays, ne se soucie pas de savoir si un homme est présent, ou non, au point

de coordonnées (x, y). Il s'intéresse seulement au nombre d'individus habitant une certaine surface de référence, qui est en général une circonscription administrative. De même, dans un gisement minier, l'exploitant ne se soucie nullement de savoir si, en un point donné, se trouve un grain de stérile ou de minerai. Tout ce qui l'intéresse, c'est de connaître, ou de prévoir, le résultat d'opérations technologiques bien définies (prélèvement d'un échantillon, exploitation d'un panneau), lorsqu'on les applique à l'espace où se distribue la minéralisation. On pourrait citer de nombreux autres cas où le phénomène ponctuel n'est pas connu et ne présente aucun intérêt par lui-même, à cause de sa trop grande complexité, et où l'on connaît seulement la réponse que donne la nature, sous forme numérique, aux opérations techniques auxquelles on la soumet. Si l'on symbolise ces opérations par des fonctions φ (fonctions de prélèvement du chapitre I, par exemple) appartenant à un espace convenable de fonctions, les réponses numériques de la nature définissent, sur cet espace, une fonctionnelle $T(\varphi)$, généralement linéaire et continue, de sorte que le phénomène naturel étudié doit être lui-même représenté par une *distribution.*

Dans les représentations transitives, où l'on suppose que le champ géométrique de la régionalisation est fini, on n'utilisera que des *distributions à support borné*, c'est-à-dire les distributions de l'espace $(\mathcal{E}')$ définies sur l'espace $(\mathcal{E})$ des fonctions de base φ indéfiniment dérivables. Très souvent, d'ailleurs, ces distributions seront simplement des mesures, agissant sur l'espace des fonctions boréliennes. Pour une mesure μ, la « quantité de métal » $\int_V d\mu$ contenue dans un volume V est toujours définie. Si l'on introduit la variable géométrique $k(x)$ attachée à ce volume V, qui est une fonction borélienne, on a, en effet :

$$\text{(III,1,1)} \qquad Q = \int_V d\mu = \mu(k).$$

Ainsi, une minéralisation, ou bien la répartition d'une population à la surface d'un pays, sont des mesures, d'ailleurs positives.

Le symbolisme transitif est exactement le même pour les distributions et pour les fonctions. En fait, dans le chapitre I, la variable régionalisée à support ponctuel était déjà, implicitement, considérée comme une distribution. On se ramène, d'ailleurs, au cas d'une variable ponctuelle en régularisant la distribution T par une fonction $\alpha(x)$ convenable. Posons :

$$\text{(III,1,2)} \qquad f(x) = \check{\alpha} * T = \int T(x + u)\, \alpha(u)\, du.$$

Ce produit de convolution existe, puisque T est à support borné. Si la fonction α est suffisamment régulière, $f(x)$ est effectivement une fonction. Par exemple, si l'on prend :

$$\alpha(x) = \frac{1}{v} k(x)$$

$k(x)$ étant la variable géométrique associée à un volume v centré à l'origine,

et si T est une mesure, la régularisée $f(x)$ n'est pas autre chose que la teneur moyenne de l'échantillon égal à φ implanté au point x.

Le covariogramme g_α associé à la variable $\check{\alpha} * T$, régularisée de la distribution T est donné, d'après la définition (I,1,3), par :

$$g_\alpha = \check{\alpha} * T * \alpha * \check{T} = T * \check{T} * \alpha * \check{\alpha}.$$

Introduisons le covariogramme :

$$A = \alpha * \check{\alpha}$$

associé à la fonction régularisante α, et de même définissons une distribution g

$$g = T * \check{T} \qquad \text{(III,1,3)}$$

que nous appellerons *covariogramme de la distribution* T. Ce covariogramme existe toujours, puisque T est à support borné. Nous obtenons alors l'exacte généralisation de (I,2,5)

$$g_\alpha = g * A. \qquad \text{(III,1,4)}$$

Ainsi, le covariogramme de la régularisée de T par α est la régularisée du covariogramme $g = T * T$ de T par le covariogramme $A = \alpha * \check{\alpha}$ de α. Cette propriété subsiste, d'ailleurs, si α est une distribution quelconque, pourvu que les produits de convolution existent (il en est toujours ainsi si la distribution α a, comme T, un support borné).

La transformée de Fourier θ de T.

$$\theta = \mathcal{F}T \qquad \text{(III,1,5)}$$

existe toujours, au sens des distributions, et de plus, comme T est à support borné, nous savons que θ *est une fonction* indéfiniment dérivable (prolongeable en une fonction holomorphe entière. Annexe A, par. 8,2). De même, la transformée de Fourier G du covariogramme g existe, et, comme les produits de convolutions sont transformés en produits usuels, on a, comme en (I,1,9) :

$$G = \mathcal{F}g = |\theta|^2. \qquad \text{(III,1,6)}$$

En faisant agir sur T et sur g la fonction de base $\varphi = 1$, dont la transformée de Fourier est la mesure de Dirac, on définit sans peine la *quantité de métal* Q, et on retrouve les résultats (I,1,12) et (I,1,13) :

$$\text{(III,1,7)} \qquad \begin{cases} Q = T(1) = \int T(x)\,dx = \theta(0) \\ Q^2 = G(1) = \int G(x)\,dx = |\theta(0)|^2 \end{cases}$$

Propriétés du Covariogramme. — Les propriétés du covariogramme résultent, tout naturellement, du fait que $T * \check{T} = g$ est une *distribution de type positif* (Voir Annexe A, par. 9,2). Conformément au théorème de Bochner, si la transformée $G = |\theta|^2$ de g est sommable, g est lui-même, obligatoirement, une fonction continue de type positif, tandis que si G n'est pas sommable, g ne peut pas être une fonction continue.

Effet de pépite. — L'effet de pépite, mentionné au paragraphe 1 du chapitre I, à propos de la signification physique du covariogramme, peut être défini de manière plus rigoureuse à l'aide des mesures δ de Dirac. Supposons que le covariogramme g soit la somme d'une mesure de Dirac (distribution de type positif) et d'une fonction $g_1(h)$ continue et de type positif :

$$g = C\delta + g_1. \qquad \text{(III,1,8)}$$

La constante C sera dite constante de pépite. Régularisons T par une fonction α, et par suite, d'après (III,1,4) g lui-même par $A = \alpha * \check{\alpha}$ On obtient :

$$g_\alpha = C\,A(h) + g_1 * A.$$

Le covariogramme régularisé est une fonction, égale à la somme d'un terme « régulier » $g_1 * A$, que l'on observerait normalement seul, en l'absence d'effet de pépite, et de la fonction $CA(h)$, produit de la constante de pépite par le covariogramme de α. En particulier, si l'on prend

$$\alpha = \frac{1}{v} k(x),$$

où $k(x)$ est la variable géométrique associée à un prélèvement v, de covariogramme géométrique $K = k * \check{k}$, on obtient :

$$g_\alpha = \frac{C}{v^2} K(h) + g_1 * \frac{K}{v^2}.$$

Si le volume v du prélèvement est petit, $g_1 * \frac{K}{v^2}$ ne diffère pratiquement pas de g_1, sauf peut être pour $|h| < D$, D étant le plus grand diamètre de v. Mais, pour $|h| < D$, le terme le plus important est $\frac{C}{v^2} K(h)$, qui représente la perturbation apportée par l'effet de pépite. Cette perturbation est d'autant plus intense que le domaine $|h| < D$ où elle se fait sentir est plus petit. La valeur du g_α à l'origine se trouve majorée de la quantité

$$\frac{C}{v^2} K(0) = \frac{C}{v} \qquad \text{(III,1,9)}$$

puisque $K(0) = v$, selon (I,1,5). Dans la théorie de l'estimation, on verra

que ce terme $\frac{C}{\varphi}$ se répercute sur les variances d'estimation, sous la forme d'une variance additionnelle, ou variance de pépite, inversement proportionnelle au volume du prélèvement.

Notons aussi que l'on a, d'après (I,1,14) :

$$\text{(III,1,10)} \qquad \frac{C}{\varphi^2} \int K(h)\, dh = C.$$

L'intégrale, étendue à tout l'espace, du terme perturbateur est toujours égal à la constante de pépite C, qui caractérise ainsi, globalement, l'effet de pépite lui-même. Physiquement, c'est elle qui possède la plus grande signification, puisque, contrairement au $g(0)$, elle ne dépend pas de la taille du prélèvement φ.

Montées et descentes. — La montée d'ordre 1, le long de l'axe des x_n, telle qu'elle est définie en (I,3,1) pour une fonction, se généralise immédiatement à une distribution $T_n(x_1 \ldots x_n)$, sous la forme d'un produit de convolution :

$$\text{(III,1,11)} \quad T_{n-1}(x_1 \ldots x_n) = T_n(x_1 \ldots x_n) * [\delta(x_1)\,\delta(x_2) \ldots \delta(x_{n-1})\,1(x_n)]$$

La définition des montées d'ordre 2, 3, ... est immédiate. Entre les transformées de Fourier de θ_{n-1} et θ_n de T_{n-1} et T_n, nous avons encore la relation :

$$\text{(III,1,12)} \qquad \theta_{n-1}(u_1 \ldots u_{n-1}) = \theta_n(u_1 \ldots u_{n-1}, 0)$$

puisque il y a échange des produits convolutifs et multiplicatifs, et échange de $\delta(x_i)$ avec $1(u_i)$.

Si S_n et T_n sont deux distributions, à support borné, de l'espace à n dimensions, ayant pour transformées de Fourier les fonctions σ_n et θ_n, le produit de convolution $U_n = S_n * T_n$ a pour transformée le produit ordinaire $\sigma_n\theta_n$. Soit U_{n-1} la distribution obtenue en effectuant la montée (III,1,11) sur la distribution U_n. On a, d'après (III,1,12)

$$\mathcal{F}U_{n-1} = \sigma_n(u_1 \ldots u_{n-1}, 0)\,\theta_n(u_1 \ldots u_{n-1}, 0)$$

et, en appliquant la transformation inverse :

$$U_{n\ 1} = S_{n-1} * T_{n-1}.$$

Ainsi la montée sur un produit de convolution donne le même résultat que le produit de convolution des résultats de la montée effectuée sur chacune des deux distributions. On dit, brièvement, qu'un *produit de convolution monte en même temps que chacun de ses facteurs.*

On prendra garde, surtout dans le cas des distributions isotropes, que $S_n * T_n$ et $S_{n-1} * T_{n-1}$ sont les produits de convolution définis dans leurs espaces respectifs, à n ou à $n - 1$ dimensions.

Une application immédiate de ce résultat à la distribution $g = T * \check{T}$

montre que *le covariogramme monte en même temps que la distribution à laquelle il est associé.* De même, le covariogramme $g_\alpha = g * A$ d'une régularisée $T * \check{\alpha}$ monte en même temps que g et A, et par suite en même temps que T et α.

Tant que l'on se limite à ne considérer que des distributions à support borné, tous les résultats du chapitre I se transposent sans difficulté : cela provient du fait que les transformées de Fourier sont des fonctions. On définira sans peine l'opération inverse de la montée, qui est la descente, ainsi que l'emploi de la transformation de Hankel pour définir des claviers isotropes. Par contre, si les supports ne sont pas bornés, des difficultés surgissent. On trouvera, dans GUELFAND et GRAEV [1] des indications sur le problème de Radon pour les distributions. Nous nous limiterons, dans le paragraphe suivant, au cas particulier des distributions isotropes, avec comme objectif de mettre en évidence le phénomène de régularisation à la montée.

2. — Montée et descente pour les distributions tempérées isotropes.

Dans ce paragraphe, nous ne considérerons que des distributions tempérées (appartenant à $\mathcal{S}'$), dont les transformées de Fourier existent toujours et sont elles-mêmes tempérées. Les fonctions de base φ seront donc les fonctions de $(\mathcal{S})$, indéfiniment dérivables et décroissant rapidement à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées, dont les transformées de Fourier appartiennent également à $(\mathcal{S})$.

La définition (III,1,11) de la montée n'a un sens que si la transformée de Fourier θ_n est une fonction, de manière que (III,1,12) puisse s'appliquer. Cette condition est vérifiée pour une distribution à support borné, mais non pour une distribution tempérée quelconque. Généralisant la relation (I,4,4), nous allons cependant définir une montée pour les distributions tempérées isotropes.

Une distribution T_n de l'espace à n dimensions sera dite isotrope, et notée $T_n(r)$, si l'on a pour toute fonction de base φ

$$(III,2,1) \qquad T_n(\varphi) = T_n(\psi)$$

la fonction isotrope ψ étant la valeur moyenne $\psi(r)$ de φ sur la sphère de rayon r. On démontre qu'une telle fonction $\psi(r)$ est elle-même indéfiniment dérivable, à décroissance rapide ainsi que ses dérivées (donc appartient à $\mathcal{S}$ en tant que fonction de la seule variable r) et que toutes ses dérivées impaires sont nulles en $r = 0$. La partie « irrégulière » de ψ est identiquement nulle. La distribution isotrope T_n est parfaitement définie dès lors que l'on connaît son action sur toutes les fonctions ψ de ce type, c'est-à-dire sur les fonctions isotropes de $(\mathcal{S})$.

[1] *Integralnaia géometria* (Moscou, 1962).

En écriture symbolique, on a :

$$\text{(III,2,2)} \qquad T_n(\varphi) = \Omega_n \int_0^\infty T_n(r)\, \varphi(r) r^{n-1}\, dr$$

la constante $\Omega_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$ représentant la surface de la sphère de rayon unité dans l'espace à n dimensions. $T_n(r)$ peut ainsi être identifiée à une distribution agissant, dans un espace à une seule dimension, sur les fonctions de base de la forme $r^{n-1}\varphi(r)$, φ étant une fonction paire de $(\mathcal{S})$. Cette distribution à une dimension sera aussi notée T_n.

La transformée de Fourier :

$$\text{(III,2,3)} \qquad \theta = \mathcal{F}_n T_n$$

de la distribution isotrope à n dimensions T_n est une distribution isotrope à n dimensions. Elle peut être identifiée également à une distribution θ de l'espace à une dimension agissant sur les fonctions de la forme $r^{n-1}\varphi(r)$, φ étant paire et appartenant à $(\mathcal{S})$.

D'un point de vue formel, on peut définir la montée, en généralisant (I,1,4) sous la forme

$$\text{(III,2,4)} \qquad T_\lambda = \mathcal{F}_\lambda \theta.$$

Pour que cette définition ait un sens, il faut que T_λ soit une distribution agissant sur $\psi_\lambda = \mathcal{F}_\lambda \varphi$ de la même manière que θ agit sur une fonction isotrope de base φ dans l'espace à λ dimensions, ou encore de la même manière que θ agit sur $\Omega_\lambda r^{\lambda-1}\varphi(r)$ dans l'espace à une seule dimension. Mais θ, en fait, n'est définie que sur les fonctions de la forme $r^{n-1}\varphi(r)$, et, pour λ quelconque, son action sur $r^{\lambda-1}\varphi$ n'est pas définie, de sorte que (III,2,4) est dépourvu de sens.

Cependant, dans le cas particulier $\lambda = n + 2k$ (*descente d'ordre entier pair* $2k$), on a bien :

$$r^{\lambda-1}\varphi = r^{n-1}(r^{2k}\varphi)$$

et $r^{2k}\varphi$ est une fonction paire de $(\mathcal{S})$, de sorte que θ agit effectivement sur $r^{\lambda-1}\varphi$. Dans ce cas T_{n+2k} est définie, sans ambiguité, par :

$$\text{(III,2,5)} \quad \begin{cases} T_{n+2k}(\psi_{n+2k}) = \dfrac{\Omega_{n+2k}}{\Omega_n}\,\theta(r^{2k}\varphi) = \dfrac{\pi^{2k}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+k\right)}\,\theta(r^{2k}\varphi) \\ \psi_{n+2k} = \mathcal{F}_{n+2k}\,\varphi(r) \end{cases}$$

En écriture symbolique, on peut aussi écrire :

$$\Omega_{n+2k} \int_0^\infty T_{n+2k}(r)\, \psi_{n+2k}(r)\, r^{n+2k-1}\, dr = \Omega_{n+2k} \int_0^\infty \theta(r)(r^{2k}\varphi) r^{n-1}\, dr$$

Introduisons aussi la fonction $\psi_n(r)$, transformée de $\varphi(r)$ dans l'espace à n dimensions

$$\psi_n(r) = \mathcal{F}_n\varphi$$

et se déduisant de ψ_{n+2k} par montée d'ordre $2k$. Dans cet espace à n dimensions, on a, d'après la formule de Parseval, et les propriétés du Laplacien (Annexe A, par. 8) :

$$\theta(r^{2k}\varphi) = \mathrm{T}_n\left[\left(-\frac{1}{4\pi^2}\right)^k \Delta^k\psi_n\right] = \left(-\frac{1}{4\pi^2}\right)^k \Delta^k \mathrm{T}_n(\psi_n).$$

On en déduit la relation remarquable, associant, dans une descente simultanée d'ordre pair, une distribution T_n et une fonction de base ψ_n isotropes :

$$\text{(III,2,6)} \quad \mathrm{T}_{n+2k}(\psi_{n+2k}) = \frac{\Omega_{n+2k}}{\Omega_n}\left(-\frac{1}{4\pi^2}\right)^k \Delta^k \mathrm{T}_n(\psi_n) = \frac{\Omega_{n+2k}}{\Omega_n}\left(-\frac{1}{4\pi_2}\right)^k \mathrm{T}_n(\Delta^k\psi_n).$$

Ces relations — (III,2,5) ou (III,2,6) — définissent la descente d'ordre paire $2k$ sans aucune ambiguité. Mais, pour la montée d'ordre pair $2k$ apparaissent des indéterminations. Cela est déjà visible sur la forme même de (III,2,6), car, si l'on remplace T_n par

$$\mathrm{T}_n + \sum_{p=0}^{k-1} a_p r^{2p}$$

le Laplacien itéré $\Delta^k\mathrm{T}_n$ n'est pas modifiée. En écriture symbolique, on doit écrire :

$$\text{(III,2,7)} \quad \begin{cases} \mathrm{T}_{n+2k}(\psi_{n-2k}) = \Omega_{n-2k}\displaystyle\int_0^\infty \theta(r) r^{n-2k-1}\varphi(r)\, dr \\ \psi_{n-2k} = \mathcal{F}_{n-2k}\varphi \end{cases}$$

Mais, en tant que distribution à une dimension, $\theta(r)$ n'agit sur $r^{n-2k-1}\varphi$ que si $r^{-2k}\varphi$ appartient à $(\mathcal{S})$. Cela ne se produit que pour une fonction φ paire de $(\mathcal{S})$ s'annulant à l'origine ainsi que ses $2k-1$ premières dérivées [ou $2(k-1)$, puisque les dérivées impaires sont toutes nulles à l'origine]. Nous désignerons par $\mathcal{S}_{2(k-1)}$ l'espace des fonctions de $\mathcal{S}$ s'annulant à l'origine ainsi que leur $2(k-1)$ premières dérivées, et par $\mathcal{S}'^{2(k-1)}$ l'espace des fonctions de $(\mathcal{S})$ ayant tous leurs moments nuls, jusqu'à l'ordre $2(k-1)$. Ces deux espaces s'échangent l'un, l'autre dans la transformation de Fourier. On voit, sur (III,2,7) que θ, considérée comme distribution d'un espace à $n-2k$ dimensions, n'est, en réalité définie que sur $\mathcal{S}_{2(k-1)}$. Elle ne se prolonge, comme distribution isotrope sur $(\mathcal{S})$, qu'à l'arbitraire d'un polynome de Laplaciens de degré $k-1$, à coefficients quelconques :

$$a_0 + a_1\Delta + \cdots + a_{k-1}\Delta^{k-1}.$$

Par réciprocité, T_{n-2k} n'est donc définie, comme distribution de l'espace à $n - 2k$ dimensions, que sur l'espace $\mathcal{G}^{2(k-1)}$, et ne se prolonge sur $(\mathcal{G})$ qu'avec l'arbitraire d'un polynôme pair quelconque de degré $2(k-1)$

$$b_0 + b_1 r^2 + \cdots + b_{k-1} r^{2(k-1)}.$$

La montée paire $2k$ ne définit donc qu'*une classe de distributions*, deux distributions étant équivalentes si leur différence est un polynôme pair en r de degré $2(k-1)$.

En ce qui concerne la montée ou la descente d'ordre impair, les choses se compliquent davantage. Pour effectuer une descente d'ordre $2k+1$, il faudrait pouvoir donner un sens à l'action de θ sur $r^{n+2k}\varphi$. Mais, pour une fonction paire quelconque de $(\mathcal{G})$, θ n'agit que sur $r^{n-1}\varphi$, et $r^{2k+1}\varphi$, n'est pas une fonction de $(\mathcal{G})$, car elle n'est pas indéfiniment dérivable à l'origine. Pour donner un sens à la montée ou descente d'ordre impair, ou, plus généralement, d'ordre λ quelconque, il est donc nécessaire de restreindre beaucoup plus considérablement l'espace des fonctions de bases.

Nous avons besoin d'un espace $(\mathcal{G}_\omega)$ tel que, si φ appartient à $\mathcal{G}_\omega$, $r^\mu\varphi(r)$ lui appartienne aussi, quel que soit le nombre μ (entier, ou non, positif ou négatif). On peut définir $(\mathcal{G}_\omega)$ comme l'espace des fonctions paires de $(\mathcal{G})$ s'annulant rapidement (c'est-à-dire plus rapidement que r^{2k}, quel que soit l'entier k) à l'origine ainsi que toutes leurs dérivées. Si une fonction de la forme $\psi(\rho^2)$ appartient à $(\mathcal{G})$, $\psi\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)$ appartient à $(\mathcal{G}_\omega)$.

Si φ est une fonction de $(\mathcal{G}_\omega)$, $r^\mu\varphi$ appartient aussi à $(\mathcal{G}_\omega)$. La distribution θ, considérée comme agissant sur les fonctions de base de la forme $r^{n-1}\varphi$ agit donc, en particulier, sur $r^{n-1}(r^{\lambda-n+1}\varphi) = r^{\lambda-1}\varphi$. Et, par suite la définition symbolique de $T_\lambda = \mathcal{F}_\lambda\theta$ a le sens précis suivant :

$$\text{(III,2,8)} \qquad \begin{cases} T_\lambda(\psi_\lambda) = \Omega_\lambda \displaystyle\int_0^\infty \theta(r) r^{\lambda-1}\varphi(r)\, dr \\ \psi_\lambda = \mathcal{F}_\lambda\varphi \end{cases}$$

La fonction de base ψ_λ, inverse de Fourier dans l'espace à λ dimensions d'une fonction φ de $(\mathcal{G}_\omega)$ a, dans cet espace, tous ses moments pairs égaux à zéro, donc vérifie, pour tous les entiers k positifs ou nuls, la relation :

$$\int_0^\infty \psi_\lambda(r) r^{\lambda+2k-1}\, dr = 0.$$

L'espace de ces fonctions ψ_λ sera désigné par $(\mathcal{G}_\lambda^\omega)$. C'est seulement sur cet espace que T_λ a été défini. Si l'on veut définir T_λ sur $(\mathcal{G})$ entier, il faut, en premier lieu, prolonger θ sur toutes les fonctions φ de $(\mathcal{G})$. Or, dans l'espace à λ dimensions, θ n'est définie que sur $(\mathcal{G}_\omega)$. Son pro-

longement sur $(\mathcal{S})$ ne donne pas une distribution unique, mais une classe de distributions, se déduisant les unes des autres par addition d'une distribution arbitraire T_0 concentrée à l'origine. Comme on se limite aux distributions isotropes, T_0 est de la forme :

$$T_0 = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \Delta^p$$

les coefficients a_p étant arbitraires. Ainsi θ, dans l'espace à λ dimensions, n'est définie qu'à une série entière de Laplacien près. Par réciprocité, on voit que T_λ n'est elle-même définie qu'à une série entière paire près, de la forme :

$$T_0 = \sum_{p=0}^{\infty} a_p r^{2p}. \qquad \text{(III,2,9)}$$

Deux distributions seront dites *analytiquement équivalentes* si elle ne diffèrent que par une série entière paire. On voit que les opérations de montée et de descente n'agissent pas sur les distributions elles-mêmes, mais seulement sur les classes d'équivalence analytique. Ainsi s'explique la règle de montée terme à terme sur la partie irrégulière des covariogrammes. Deux covariogrammes ayant même partie irrégulière sont analytiquement équivalents, en tant que distributions, et doivent donc donner, à une équivalence près, c'est-à-dire à une série entière paire près, le même résultat à la montée. Par contre, la partie régulière constitue une distribution de la classe 0. A la montée, elle donne encore une distribution de la classe zéro, c'est-à-dire une série entière paire, qui peut être absolument quelconque.

3. — Montée et descente pour la distribution r^μ.

Appliquons les résultats du paragraphe précédent à la distribution r^μ, ou, plus exactement, à la classe des distributions ayant r^μ comme partie irrégulière. La montée d'ordre λ, effectuée sur cette distribution, permet de retrouver très simplement la règle (II,1,9).

Considérée comme une distribution de l'espace à n dimensions, $\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^\mu$ a pour transformée de Fourier, d'après la formule (A.8,22) :

$$\mathcal{F}_n \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^\mu = \pi^{-\mu-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}\right) \rho^{-\mu-n}.$$

On obtient la montée d'ordre λ en effectuant la transformation de Hankel d'ordre $n-\lambda$, ce qui donne :

$$\pi^{-\mu-\frac{n}{2}} \mathcal{F}_{n-\lambda} \Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}\right) \rho^{-\mu-n} = \pi^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right) r^{\lambda+\mu}.$$

On retrouve bien la règle habituelle :

$$M_\lambda \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^\mu = \pi^{\lambda/2}\, \Gamma\left(-\frac{\mu+\lambda}{2}\right) r^{\lambda+\mu}.$$

Comme, en réalité, r^μ ou $r^{\lambda+\mu}$ ne sont ici définies qu'à une série entière près, rien ne nous empêche de remplacer

$$\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) r^\mu \qquad \text{par} \qquad \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) [r^\mu - r^{2k}]$$

et de retrouver la séquence logarithmique (II,1,11), en faisant tendre μ vers $2k$.

CHAPITRE IV

L'ESTIMATION DES VARIABLES RÉGIONALISÉES

SOMMAIRE

Ce chapitre, fondamental pour les applications pratiques, est consacré entièrement au problème de l'estimation des variables régionalisées. Du point de vue théorique, il montre que la variance d'estimation est liée à la partie irrégulière du covariogramme et dégage les règles de correspondance qui doivent être comparées à celles de la montée.

Le paragraphe 1 *définit, pour une maille régulière de prélèvement* a, *la notion de* variance d'estimation $\sigma^2(a)$, *et en donne deux expressions équivalentes : l'une* (IV, 1,12) *à partir du covariogramme lui-même, l'autre* (IV, 1,9) *à partir de sa transformée de Fourier. On montre que cette variance est d'autant plus petite que la régionalisation est plus régulière et le réseau de prélèvements plus serré, et qu'elle est toujours positive si* $g(h)$ *est de type positif. On note ensuite un point un peu troublant : si, dans ces formules, on remplace les vraies valeurs de* $g(h)$ *par les valeurs expérimentales, on obtient identiquement zéro. On ne peut pas déduire des mêmes données à la fois une estimation et la précision de celle-ci. Le recours à un modèle est obligatoire, et cela revient à faire une hypothèse sur le comportement du* $g(h)$ *à l'origine. De lecture facile, ce paragraphe se termine par une application au clavier de Bessel.*

Le paragraphe 2 *dégage, dans le cas à une dimension, un* principe de correspondance *terme à terme entre la partie irrégulière du* $g(h)$ *et le développement limité de* $\sigma^2(a)$ *autour de* $a = 0$, *sous réserve d'un terme fluctuant, ou Zitterbewegung à peu près imprévisible, qui apparaît lorsque la portée est finie, et que l'on néglige en pratique. La forme explicite de la règle de correspondance est obtenue ensuite, à l'aide des fonctions de Bessel. Un terme en* x^λ *dans la partie irrégulière donne une composante* $T_\lambda a^{\lambda+1}$ *dans* $\sigma^2(a)$, *avec* $T_{2k} = 0$ *pour* $\lambda = 2k$ *(partie régulière). Le lecteur peut passer rapidement sur le détail des calculs, mais les résultats* (IV, 2,9) *et* (IV, 2,10) *sont fondamentaux. On notera aussi que deux covariogrammes ayant même partie irrégulière (analytiquement équivalents) conduisent au même développement limité de* $\sigma^2(a)$.

Le paragraphe 3 *généralise au cas de plusieurs dimensions le principe de correspondance, et en donne l'expression* (IV, 3,3) *sous forme d'une série multiple. Le cas* $n = 2$, *examiné en détail, fait apparaître un* principe de composition *des termes de ligne et des termes de tranches. Pour une maille* a_1, $a_2 (a_1 \geqslant a_2)$, *on a* $\sigma^2(a_1 a_2) = \sigma_1^2(a_1) + a_1 \sigma_2^2(a_2)$, *les variances* σ_2^2 *et* σ_1^2 *étant calculées à une dimension sur le covariogramme* g_2, *et le covariogramme* g_1, *qui s'en déduit par montée. Les formules explicites sont* (IV, 3,11) *et* (IV, 3,12).

Le paragraphe 4 *traite le cas des mailles aléatoires stratifiées, et compare leurs résultats à ceux des mailles régulières. Dans le cas où les mailles sont adaptées, les deuxièmes sont supérieures aux premières.*

1. — Théorie générale des mailles régulières.

L'un des problèmes les plus importants qui se pose à propos d'une variable régionalisée $f(x)$, de covariogramme $g(h)$, est celui de l'estimation de la quantité de métal :

$$\text{(IV,1,1)} \qquad Q = \int f(x)\, dx$$

à l'aide des renseignements disponibles expérimentalement. Nous supposerons que ces renseignements sont constitués par un réseau de prélèvements effectués selon une maille régulière, parallélépipédique $(a_1, a_2 \ldots a_n)$. Autrement dit, l'espace à n dimensions de la régionalisation étant rapporté à un système d'axes rectangulaires, parallèles aux directions principales de la maille, les différents prélèvements sont effectués aux points :

$$\text{(IV,1,2)} \quad y + ka = (y_1 + k_1 a_1, y_2 + k_2 a_2, \ldots y_n + k_n a_n).$$

Les k_i sont des nombres entiers, prenant toutes les valeurs possibles positives et négatives. Le point $y = (y_1, \ldots y_n)$ est l'un, quelconque, des points de prélèvements pris comme origine du réseau. On admet, implicitement, que le réseau se poursuit à l'infini. En pratique, puisque le champ géométrique de la régionalisation est supposé borné, il suffira que le réseau réel s'étende un peu au delà des limites de ce champ, c'est-à-dire, en terminologie minière, que la reconnaissance ait été exhaustive.

Les prélèvements eux-mêmes sont supposés ponctuels (s'ils ne sont pas ponctuels, mais résultent de l'action sur $f(x)$ d'une pondération ou d'un prélèvement symbolisé par une fonction $p(u)$, il suffit de remplacer f par $f * \check{f}$ et g par $g * p * \check{p}$ pour se ramener au cas de prélèvements ponctuels). Les renseignements disponibles pour procéder à l'estimation de Q sont donc constitués par l'ensemble infini des valeurs numériques $f(y + ka)$ pour tous les systèmes d'entiers $k = (k_1, k_2 \ldots k_n)$. En réalité, seul un nombre fini de ces valeurs sont différentes de 0, puisque le champ géométrique est borné. Pour estimer la quantité de métal Q, c'est-à-dire pour calculer une valeur approchée de l'intégrale (IV,1,1), on forme la somme multiple, étendue à tous les systèmes d'entiers positifs, ou négatifs :

$$\text{(IV,1,3)} \quad Q^*(y_1, \ldots y_n) = a_1 a_2 \ldots a_n \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} f(y_1 + k_1 a_1, \ldots y_n + k_n a_n)$$

que nous appellerons estimateur de Q, et que nous écrirons, en notation symbolique abrégée :

$$\text{(IV,1,4)} \qquad Q^*(y) = |a| \sum_k f(y + ka).$$

Le symbole $|a|$ représente ici le volume $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ du parallélépipède de base, et k représente le système de n nombres entiers $(k_1, k_2 \ldots k_n)$.

L'estimateur $Q^*(y)$ est manifestement *une fonction périodique*, de périodes $a = (a_1, \ldots, a_n)$, de son argument vectoriel y, puisqu'il est indifférent de prendre comme origine l'un ou l'autre des prélèvements du réseau. Il en résulte que le problème de l'estimation peut être traité à l'aide de développements *en série de Fourier*. On représentera $Q^*(y)$ sous la forme classique :

$$(IV,1,5) \quad Q^*(y) = \sum_{p_1 \ldots p_n} C_{p_1 \ldots p_n} \exp\left[2\pi i\left(\frac{p_1 y_1}{a_1} + \cdots + \frac{p_n y_n}{a_n}\right)\right]$$

les coefficients $C_{p_1 \ldots p_n}$ étant donnés par les formules :

(IV,1,6)

$$C_{p_1 \ldots p_n} = \frac{1}{a_1 \ldots a_n} \int_P Q^*(y) \exp\left[-2\pi i\left(\frac{p_1 y_1}{a_1} + \cdots + \frac{p_n y_n}{a_n}\right)\right] dy_1 \ldots dy_n.$$

Sous forme condensée, on écrira symboliquement :

$$(IV,1,6) \qquad \begin{cases} Q^*(y) = \sum_p C_p \, e^{2\pi i p \frac{y}{a}} \\ C_p \quad = \frac{1}{|a|} \int_P Q^*(y) \, e^{-2\pi i p \frac{y}{a}} \, dy. \end{cases}$$

Dans l'expression (IV,1,5) ou (IV,1,6) du coefficient C_p, l'intégration est étendue au parallélépipède P d'arêtes $a_1 \ldots a_n$, qui est le parallélépipède de base du réseau. Si l'on remplace, dans cette intégrale, $Q^*(y)$ par son expression (IV, 1,4), on fait apparaître l'intégrale de la variable f étendue à tout l'espace :

$$C_p = \int f(y) \, e^{-2i\pi p \frac{y}{a}} \, dy.$$

On reconnaît l'expression de la transformée de Fourier (A,8,1) de $f(x)$

$$\Phi(u) = \mathcal{F}f = \int f(x) e^{-2\pi i u x} \, dx$$

et l'on peut remplacer (IV,1,6) par le système équivalent suivant :

$$(IV,1,7) \qquad \begin{cases} Q^*(y) = \sum_p C_p e^{2\pi i \frac{p}{a} y} \\ C_p \quad = \Phi\left(\frac{p}{a}\right) = \Phi\left(\frac{p_1}{a_1}, \frac{p_2}{a_2}, \ldots \frac{p_n}{a_n}\right). \end{cases}$$

Pour $p = 0$, en particulier (c'est-à-dire $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$), on a :

$$(IV,1,8) \qquad C_0 = \Phi(0) = \int f(x) \, dx = Q.$$

Le terme constant du développement $Q^*(y)$ n'est autre que la quantité de métal Q qu'il s'agit d'estimer. L'ensemble des termes périodiques représente l'erreur associée à cette estimation.

Pour caractériser l'ampleur de cette erreur, il est naturel d'introduire la *variance d'estimation* $\sigma^2(a)$, définie comme la valeur moyenne de

$$[Q^*(y) - Q]^2$$

dans le parallélépipède P construit sur les périodes $a_1 \ldots a_n$. Cette quantité, purement géométrique, est très proche parente des variances du calcul des probabilités. Si l'on imagine, en effet, que l'origine y du réseau de prélèvements est implantée au hasard dans le parallélépipède de base P, de telle manière que tous les points de P aient la même probabilité à priori d'être choisis, on voit que, relativement à cette implantation aléatoire, $Q^*(y)$ est une véritable variable aléatoire, dont la variance ne diffère pas de la variance d'estimation $\sigma^2(a)$. Quelle que soit l'interprétation que l'on retienne, cette variance est donnée par :

$$\sigma^2(a) = \frac{1}{|a|} \int_P [Q^*(y) - Q]^2 \, dy. \tag{IV,1,9}$$

Remplaçons $Q^*(y)$ par son développement de Fourier (IV,1,7), dont ne subsistent d'ailleurs, selon (IV,1,8), que les termes périodiques. Utilisant la propriété classique d'orthogonalité des exponentielles imaginaires, il vient immédiatement (formule de Parseval) :

$$\sigma^2(a) = \sum_p |C_p|^2 - C_0^2 = \sum_p \left| \Phi\left(\frac{p}{a}\right) \right|^2 - Q^2.$$

Mais, d'après la formule (I,1,9), $|\Phi(u)|^2$ n'est autre que la transformée de Fourier $G(u)$ du covariogramme $g(h)$ associé à la variable $f(x)$.

$$G(u) = \mathcal{F}g.$$

La variance d'estimation est donc donnée par la formule suivante :

$$\sigma^2(a) = \sum_p G\left(\frac{p}{a}\right) - G(0). \tag{IV,1,10}$$

Nous allons maintenant chercher une deuxième expression de $\sigma^2(a)$ qui fasse intervenir le covariogramme $g(h)$ lui-même, et non plus sa transformée de Fourier $G(u)$. Partant de la définition (IV,1,9), et développant le carré qui figure sous le signe somme, on obtient, puisque la valeur moyenne dans P de $Q^*(y)$ est égale à Q :

$$\sigma^2(a) = \frac{1}{|a|} \int_P [Q^*(y)]^2 \, dy - Q^2. \tag{IV,1,11}$$

En élevant (IV,1,4) au carré, on met $[Q^*(y)]^2$ sous la forme d'une série multiple (d'ordre $2n$) dont l'écriture symbolique est la suivante :

$$[Q^*(y)]^2 = |a|^2 \sum_{p,q} f(y + pa) f(y + qa).$$

Remplaçons q par $p + k$ avant d'intégrer dans P. Il vient :

$$\int_P [Q^*(y)]^2 \, dy = |a|^2 \int_P \sum_{p,k} f(y + pa) \, f(y + pa + ka) \, dy.$$

Mais la sommation sur les indices $p = (p_1 \ldots p_n)$ permet de remplacer l'intégration dans P par une intégration étendue à tout l'espace, et l'on voit alors apparaître l'expression (I,1,2) qui nous a servi à définir le covariogramme $g(h)$:

$$\int_P [Q^*(y)]^2 \, dy = |a|^2 \int \sum_k f(y) \, f(y + ka) \, dy = |a|^2 \sum_k g(ka).$$

En substituant ce résultat dans (IV,1,11), et en tenant compte de l'expression (I,1,13) du carré Q^2 de la quantité de métal, nous obtenons la deuxième formule fondamentale cherchée :

$$\text{(IV,1,12)} \qquad \sigma^2(a) = |a| \sum_k g(ka) - \int g(h) \, dh.$$

On vérifiera facilement, à l'aide de la formule sommatoire de Poisson (A,4,3) que les deux expressions (IV,1,10) et (IV,1,13) de la variance d'estimation sont strictement équivalentes. Dans les applications, on se servira de l'une ou de l'autre, selon leur plus grande commodité.

Propriétés de la variance d'estimation $\sigma^2(a)$**.** — On se rend compte, intuitivement, qu'une estimation doit être d'autant plus précise que le réseau de prélèvements est plus serré, et que la régionalisation est elle-même plus continue et plus régulière dans sa variation spatiale. L'influence de ces deux facteurs est visible sur la formule (IV,1,12). En effet, la variance d'estimation apparaît comme la différence entre la valeur approchée et la valeur exacte d'une même intégrale $\int g(h) \, dh$, c'est-à-dire comme l'erreur commise dans le calcul approché de cette intégrale à partir des valeurs numériques des $g(ka)$. Elle est naturellement d'autant plus faible que les valeurs numériques disponibles sont plus nombreuses, c'est-à-dire lorsque le réseau de prélèvements est plus serré, et aussi, comme le montre la théorie du calcul approché des intégrales, d'autant plus faible que $g(h)$ est plus régulière, c'est-à-dire lorsque $f(x)$ est elle-même plus régulière dans l'espace. Du point de vue pratique, par ailleurs, on se rend compte que la variance $\sigma^2(a)$ sera difficile à calculer numériquement, si le réseau est serré, car il s'agira de mettre en évidence la différence de deux quantités

très voisines l'une de l'autre et pénibles à calculer. Nous serons donc conduits, dans les paragraphes suivants, à l'aide précisément de méthodes empruntées à la théorie du calcul approchée des intégrales, à mettre au point des formules d'approximation plus directes.

Naturellement, la variance d'estimation est *obligatoirement* positive. Cela résulte de sa définition même (IV,1,9). Mais les formules équivalentes (IV,1,10) et (IV,1,12) appliquées à une fonction $g(h)$ quelconque et à sa transformée de Fourier $G(u)$ pourraient très bien conduire à une variance négative. En fait, pour que de telles valeurs négatives ne soient jamais possibles, quelle que soit la maille a, il suffit que la fonction $g(h)$ utilisée comme covariogramme soit de *type positif*. Le théorème de Bochner, en effet (voir Annexe A, parag. 9,1) nous indique que, si $g(h)$ est de type positif, sa transformée de Fourier $G(u)$ ne prend que des valeurs positives ou nulles : l'expression (IV,1,10) est alors une somme de termes tous positifs $G\left(\frac{p_1}{a_1} \dots \frac{p_n}{a_n}\right)$, étendue aux entiers tels que le produit $p_1 p_2 \dots p_n \neq 0$.

L'estimation de $\sigma^2(a)$. — Pour estimer la valeur numérique des $g(ka)$ de la formule (IV,1,12), on doit se contenter des données expérimentalement disponibles, qui sont les $f(y + ka)$. Au lieu des valeurs exactes des $g(ka)$, qui restent inconnues, on disposera de leurs estimations $g^*(ka)$ calculées de la manière suivante :

$$g^*(ka) = |a| \sum_p f(y + pa)\, f(y + pa + ka).$$

De même, pour estimer Q^2, on n'aura pas d'autre ressource que d'élever au carré l'estimateur $Q^*(y)$ lui-même, ce qui donne, nous l'avons vu :

$$[Q^*(y)]^2 = |a|^2 \sum_{p,k} f(y + pa)\, f(y + pa + ka).$$

Si l'on porte ces valeurs estimées $g^*(ka)$ et $[Q^*(y)]^2$, au lieu des valeurs vraies inconnues, dans la formule (IV,1,12) on obtient *identiquement zéro*. La formule (IV,1,10) conduit au même résultat négatif, car il est bien connu qu'un réseau périodique de données expérimentales ne permet aucune estimation des composantes harmoniques dont les périodes soient des sous-multiples de celles du réseau.

On doit conclure qu'*il est théoriquement impossible de déduire des mêmes données expérimentales à la fois une estimation et la précision de cette estimation.* Le formalisme développé jusqu'ici semble donc conduire à une impasse expérimentale. En fait, on lèvera la difficulté en se donnant à priori le covariogramme sous la forme d'une expression mathématique $g(h, \lambda, \mu \dots)$ dépendant d'un ou de plusieurs paramètres λ, μ... Les valeurs numériques de ces paramètres pourront toujours être déterminées par ajustement sur les valeurs expérimentales des $g^*(ka)$. C'est à la fonction $g(h)$, ainsi déterminée, que l'on appliquera les formules (IV,1,12) ou (IV,1,10). Naturelle-

ment, le résultat obtenu ne vaudra que ce que vaudra le modèle, ou schéma mathématique, $g(h, \lambda, \mu)$ utilisé. Seule l'expérience pourra nous indiquer les schémas [1] convenant à tel ou tel type de régionalisation. Nous verrons, dans les paragraphes suivants, que le facteur déterminant est ici le comportement du covariogramme dans la zone $|h| < a$, qui est justement la zone inaccessible expérimentalement, comportement lié à la partie irrégulière de $g(h)$. C'est, en définitive le choix de cette partie irrégulière qui sera l'élément décisif. Il ne pourra être suggéré que par les connaissances directes que l'on possédera sur la nature physique du phénomène étudié.

Exemple du clavier de Bessel de 2e espèce. — A titre d'exemple, appliquons les formules de ce paragraphe au clavier de Bessel modifié de deuxième espèce (chap. II, par. 1,1) dans le cas d'une estimation par la maille a dans l'espace à *une seule dimension*. Le résultat obtenu sera utile dans la suite. Soit le covariogramme

$$g(h) = (Ch)^{\lambda} K_{-\lambda}(Ch).$$

Il a pour transformée de Fourier, selon la formule (A,8,30) avec $n = 1$

$$G(u) = \sqrt{\pi}\, 2^{\lambda} \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \frac{C^{2\lambda}}{(C^2 + 4\pi^2 u^2)^{\lambda + \frac{1}{2}}}.$$

Appliquons la formule (IV,1,10)

$$\text{(IV,1,13)} \quad \sigma^2(a) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{n}{a}\right) = 2^{-\lambda}\, \pi^{-2\lambda - \frac{1}{2}}\, \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) C^{2\lambda}\, a^{2\lambda+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n^2 + \frac{a^2 C^2}{4\pi^2}\right)^{\lambda + \frac{1}{2}}}.$$

Si la maille a est inférieure à la « portée » du phénomène, qui est $\frac{2\pi}{C}$, on a le droit d'utiliser des développements de la forme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(b + n^2)^{\alpha}} = S(2\alpha) - \alpha S(2\alpha + 2) b + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2!} S(2\alpha + 4) b^2 - \cdots$$

où $S(\mu)$ représente la fonction de Riemann :

$$S(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}}$$

[1] Le point de vue « statistique » un peu naïf, qui consisterait à admettre l'indépendance (au sens probabiliste) des différents prélèvements conduirait à une variance $|a|\, g(0) - Q^2$: l'hypothèse faite implicitement sur l'indépendance des données revient à admettre que le $g(h)$ est identiquement nul, ou constant, sauf au voisinage de l'origine. On adopte donc bien un schéma particulier, d'ailleurs fort mal adapté à la plupart des régionalisations réelles, et conduisant, selon la forme des réseaux de prélèvements, à des valeurs trop fortes ou trop faibles, dénuées de signification pratique.

liée aux nombres de Bernouilli $\left(B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42} \cdots\right)$, dans le cas où μ est un entier pair $2k$, par la relation classique :

$$S(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k}.$$

Portant ce développement dans (IV,1,13), on obtient la variance d'estimation sous la forme suivante :

$$\text{(IV,1,14)} \quad \sigma^2(a) = \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \frac{C^{2\lambda} a^{2\lambda+1}}{2^{\lambda} \pi^{2\lambda+\frac{1}{2}}} \left[S(2\lambda+1) - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) S(2\lambda+3) \frac{a^2C^2}{4\pi^2} + \frac{1}{2!}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda+\frac{3}{2}\right) S(2\lambda+5)\left(\frac{a^2C^2}{4\pi^2}\right)^2 - \cdots \right].$$

Lorsque la maille a est inférieure à $\frac{2\pi}{C}$, ce développement converge effectivement et permet le calcul de $\sigma^2(a)$. Il est souvent possible, si a est petit, de se contenter de la partie principale de cette expression, qui est en $a^{1+2\lambda}$

$$\text{(IV,1,15)} \quad \sigma^2(a) = \frac{C^{2\lambda}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{2^{\lambda}\pi^{2\lambda+\frac{1}{2}}} [1 + 0(a^2)] a^{1+2\lambda} S(1+2\lambda).$$

Cette formule nous permettra plus loin de dégager une règle de correspondance terme à terme entre le développement de $\sigma^2(a)$ et la partie irrégulière de $g(h)$. Mais il faut bien voir que le résultat obtenu suppose a petit. Si a est grand devant $\frac{2\pi}{C}$, la décroissance exponentielle des fonctions de Bessel nous indique que, dans (IV,1,12), tous les $g(ka)$ sont négligeables devant $g(0)$. On obtient la formule asymptotique :

$$\text{(IV,1,16)} \qquad \sigma^2(a) = |a| g(0) - \int g(h)\, dh$$

qui a une signification aléatoire évidente : c'est elle, en effet, que l'on obtiendrait en calcul des probabilités, en supposant les prélèvements indépendants (1). De fait, pour un clavier $g(h)$ ayant une portée finie $b(g(h) \equiv 0$ pour $|h| > b)$, avec une maille a telle que $a > b$, l'un des prélèvements, au plus, donne un résultat non nul. Tout se passe alors comme si ce prélèvement unique était implanté au hasard dans une bande de largeur a contenant le champ géométrique de la régionalisation. Dans le cas d'une fonction de Bessel, ce résultat n'est qu'asymptotique, car $g(h)$ ne s'annule qu'asymptotiquement. Il s'explicite sous la forme :

$$\sigma^2(a) = 2^{\lambda-1}\Gamma(\lambda) a - 2^{\lambda}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{C}.$$

(1) Voir note, p. 83.

2. — Calcul des variances d'estimation à une dimension.

Rappelons d'abord la formule classique d'Euler Mac-Laurin, utilisée dans la théorie du calcul approché des intégrales. Si un intervalle (x_0, x_n) a été subdivisé en n intervalles égaux (x_i, x_{i+1}), et si $f(x)$ est une fonction dérivable $(2p+2)$ fois, continue ainsi que ses $(2p+2)$ premières dérivées sur tout l'intervalle (x_0, x_n), extrémités comprises, on a :

(IV,2,1)

$$\left\{\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = {} & \frac{(x_n - x_0)}{n}\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right] \\ & - \frac{B_2}{2}\left[\frac{x_n - x_0}{n}\right]^2 [f'(x_n) - f'(x_0)] \\ & + \frac{B_4}{4!}\left[\frac{x_n - x_0}{n}\right]^4 [f'''(x_n) - f'''(x_0)] \\ & + \cdots + (-1)^p \frac{B_{2p}}{(2p)!}\left[\frac{x_n - x_0}{n}\right]^{2p} [f^{(2p-1)}(x_n) - f^{(2p-1)}(x_0)] + R_p.\end{aligned}\right.$$

Les B_{2p} sont les nombres de Bernouilli

$$\left(B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = \frac{1}{30}\cdots\right),$$

et le reste R_p vérifie l'inégalité :

$$|R_p| < \frac{B_{2p+2}}{(2p+2)!}\, n \left(\frac{x_n - x_0}{n}\right)^{2p+3} M_p$$

M_p étant le maximum de la dérivée d'ordre $(2p+2)$ sur l'intervalle (x_0, x_n).

Nous allons utiliser cette formule pour le calcul de la variance d'estimation $\sigma^2(a)$ à une dimension, qui s'écrit, selon (IV,1,12) :

$$\text{(IV,2,2)} \qquad \sigma^2(a) = ag(0) + 2a\sum_{n=1}^{\infty} g(na) - 2\int_0^{\infty} g(x)\,dx.$$

Cette expression rappelle étroitement la formule d'Euler Mac-Laurin. Mais il faut bien prendre garde que le covariogramme $g(h)$ présente, en général des irrégularités analytiques en $h = 0$, et aussi, le cas échéant, en $h = b$, b désignant la portée du covariogramme, si celle-ci est finie ($g(h) \equiv 0$ pour $h > b$). C'est pourquoi, désignant par $(k+1)$ le plus grand entier tel que $(k+1)\,a$ soit inférieur ou égal à la portée b :

$$\text{(IV,2,3)} \qquad (k+1)a \leqslant b < (k+2)a$$

nous séparerons, dans le deuxième membre de (IV,2,2), les trois termes suivants :

$$\begin{cases} R_1 = a[g(0) + g(a)] - 2\int_0^a g(x)\,dx \\ R_2 = 2a\left[\frac{1}{2}\,g(a) + g(2a) + \cdots + g[(k-1)a] + \frac{1}{2}\,g(ka)\right] - 2\int_a^{ka} g(x)\,dx \\ R_3 = a\,g(ka) - 2\int_{ka}^{b} g(x)\,dx. \end{cases}$$

Nous supposerons (et cette hypothèse est toujours vérifiée en pratique) que $g(x)$ ne présente d'irrégularité qu'en $x = 0$ et $x = b$, de sorte que la formule d'Euler Mac Laurin soit applicable sur l'intervalle (a, ka). On obtient alors, selon (IV,2,1), l'expression suivante pour R_2 :

$$R_2 = 2a^2\frac{B_2}{2!}[g'(ka) - g'(a)] - 2a^4\frac{B_4}{4!}[g'''(ka) - g'''(0)] + \cdots$$

Nous regrouperons ensuite les termes de R_2 contenant les dérivées au point a avec R_1, et les termes contenant les dérivées au point ka avec R_3. On obtient ainsi la décomposition de $\sigma^2(a)$ sous la forme d'une somme de deux termes T_0 et T_z

$$\text{(IV,2,4)} \qquad \sigma^2(a) = T_0(a) + T_z(a)$$

donnés par la formule suivante :

(IV,2,5)

$$\begin{cases} T_0(a) = a[g(0) + g(a)] - 2\int_0^a g(x)\,dx - 2a^2\frac{B_2}{2!}\,g'(a) + 2\frac{a^4}{4!}\,B_4\,g'''(a) - \cdots \\ T_z(a) = ag(ka) - 2\int_{ka}^{b} g(x)\,dx + 2a^2\frac{B_2}{2!}\,g'(ka) - 2a^4\frac{B_4}{4!}\,g'''(ka) + \cdots \end{cases}$$

T_0 s'appelle le *terme d'extension*. Il ne dépend que du comportement du $g(h)$ dans l'intervalle $(0, a)$, c'est-à-dire au voisinage de l'origine. Le terme T_z est lié, au contraire, à la manière dont $g(x)$ se raccorde en $x = b$ à l'axe des x. Il porte le nom de *Zitterbewegung*, ou *terme fluctuant*. Étudions le en premier lieu.

Le Zitterbeweguug. [1]. — Pour étudier le terme fluctuant $T_z(a)$, supposons qu'au voisinage de $x = b$ le covariogramme $g(x)$ admette un développement de la forme suivante :

$$g(x) = \sum_{\lambda} C_\lambda (b - x)^\lambda$$

[1] Pour plus de détail sur le Zitterbewegung, voir Annexe F, et, en particulier, son expression explicite (5) sous forme de développement en série de Fourier.

et cherchons la contribution à T_z de la composante $(b - x)^\lambda$, l'exposant λ étant quelconque. Nous poserons, pour simplifier les écritures :

$$\text{(IV,2,6)} \qquad \varepsilon = \frac{b}{a} - (k+1)$$

ε est le reste de la division de b par a. Il est compris entre 0 et 1. En portant dans (IV,2,5), on obtient le Zitterbewegung $T_z(\lambda)$ du monome $(b - x)^\lambda$ par la formule :

(IV,2,7)

$$T_z(\lambda) = a^{1+\lambda}\left[(1+\varepsilon)^\lambda + 2\varepsilon^\lambda - \frac{2}{\lambda+1}(1+\varepsilon)^{\lambda+1} - 2\lambda\frac{B_2}{2!}(1+\varepsilon)^{\lambda-1} + 2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\frac{B_4}{4!}(1+\varepsilon)^{\lambda-3} - \cdots\right].$$

Ce terme est donc en $a^{1+\lambda}$. Lorsque ε varie de 0 à 1, il passe par des valeurs alternativement positives et négatives. On peut montrer que l'intégrale $\int_0^1 T_z\, d\varepsilon$ c'est-à-dire la valeur moyenne de T_z relativement à ε, est égale à zéro. Par exemple, un terme en $(b - x)$, correspondant à $\lambda = 1$, donne :

$$T_z(1) = a^2\left(\varepsilon - \varepsilon^2 - \frac{1}{6}\right).$$

Ce zitterbewegung est très gênant dans la pratique, car on n'a, en général, aucune indication expérimentale sur ε. On s'autorise alors du fait que la valeur moyenne de T_z relativement à ε est égale à zéro pour *négliger purement et simplement* ce terme encombrant. C'est ce que nous ferons dans toute la suite. Mais il n'en existe pas moins, et peut entraîner des fluctuations d'amplitude importante (et pratiquement imprévisibles) entre la véritable valeur de $\sigma^2(a)$ et son estimation à l'aide du seul terme d'extension T_0. On en verra un exemple sur la figure 1 du chapitre VI. Dans le cas où la portée b est infinie, et où $g(h)$ ne s'annule qu'asymptotiquement à l'infini, le terme fluctuant disparaît [pourvu que la décroissance de $g(h)$ soit assez rapide]. Ainsi, des claviers comme ceux de Bessel ou de Laguerre sont dépourvus de Zitterbewegung.

Le terme d'extension. — Pour évaluer le terme d'extension T_0 de la formule (IV,2,5), supposons que $g(x)$ admette, au voisinage de l'origine, un développement de la forme :

$$\Sigma C_\lambda x^\lambda$$

valable jusqu'à $x = a$. La contribution à T_0 de la composante (x^λ) sera notée $T_0(x^\lambda)$. On aura :

$$T_0 = \Sigma C_\lambda T_0(x^\lambda).$$

A moins que la somme ne comporte qu'un nombre fini de termes, ou ne soit convergente, on obtiendra, en général, un développement limité de T_0 et non une expression exacte.

Le calcul de $T_0(x^\lambda)$, d'après (IV,2,5), est immédiat :

(IV,2,7)

$$T_0(x^\lambda) = a^{1+\lambda}\left[1 - \frac{2}{1+\lambda} - 2\lambda\frac{B_2}{2!} + 2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\frac{B_4}{4!} - \cdots\right].$$

Ainsi le terme x^λ apporte une contribution en $a^{1+\lambda}$. Si λ est un entier pair $2k$, on vérifie facilement, à l'aide de la formule d'Euler Mac Laurin appliquée à $f(x) = x^\lambda$ entre 0 et 1, que $T_0(2k)$ s'annule.

$$T_0(x^{2k}) = 0.$$

On voit que, seuls les termes de la partie irrégulière de $g(x)$ apportent une contribution au développement limité de la variance d'extension, et, pour une partie irrégulière de la forme :

$$\Sigma C_\lambda x^\lambda$$

ce développement limité est de la forme :

(IV,2,8) $$\sum C_\lambda T_\lambda a^{\lambda+1}$$

les coefficients T_λ définis par $T_0(x^\lambda) = T_\lambda a^{\lambda+1}$ étant indépendants de a. On établit ainsi un *principe de correspondance* terme à terme entre le développement de la partie irrégulière de $g(x)$ et celui de la variance d'estimation (Zitterbewegung exclu). Ce principe, qui doit être rapproché de la règle de montée terme à terme sur la partie irrégulière, montre comment la précision d'une estimation est liée au comportement du covariogramme à l'origine, c'est-à-dire finalement à la régularité de la régionalisation elle-même. Dans la suite, nous dirons que deux covariogrammes sont analytiquement équivalents s'ils ont même partie irrégulière. On voit que *les variances d'estimation* $\sigma^2(a)$, *calculées pour deux covariogrammes analytiquement équivalents admettent un même développement limité en* a, autour de $a = 0$. Soulignons bien que le résultat obtenu sous la forme (IV,2,8) suppose que la maille a soit petite, ou plus exactement, que le développement du $g(x)$ sous la forme $\Sigma C_\lambda x^\lambda$ reste utilisable jusqu'à $x = a$. Lorsque la maille a est grande, les points de prélèvements ne sont pas trop nombreux, et la formule (IV,1,12) peut être calculée directement. Dans le cas intermédiaire où a serait trop grand pour (IV,2,8) mais où (IV,1,12) comporterait déjà un nombre excessif de termes, on pourra souvent se contenter, en pratique, d'un simple raccordement graphique entre les deux zones où $\sigma^2(a)$ est calculable : ce raccordement graphique se fait, en général, très bien.

D'autre part, on ne perdra pas de vue que (IV,2,8) n'est rien de plus qu'un développement limité autour de $a = 0$. Pour un covariogramme dépourvu de partie irrégulière (analytiquement équivalent à zéro) de la forme :

$$g(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} x^{2k}$$

la règle de correspondance conduirait à une variance identiquement nulle, puisque $T_{2k} = 0$. En réalité, pour a différent de zéro, $\sigma^2(a)$ n'est certainement pas nulle. Le résultat obtenu signifie seulement que $\sigma^2(a)$ s'annule en $a = 0$, ainsi que ses dérivées de tous les ordres, de sorte que les développements limités à un nombre quelconque de termes s'évanouissent. Pour donner un exemple, prenons

$$g(x) = e^{-ux^2} = \Sigma(-1)^n \frac{(ux^2)^n}{n!}.$$

La variance d'estimation est donnée par :

$$\sigma^2(a) = a\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-un^2a^2}\right] - \sqrt{\frac{\pi}{u}}.$$

Appliquons la formule d'échange des fonctions théta (A,8,21). Il vient :

$$\sigma^2(a) = 2\sqrt{\frac{\pi}{u}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{ua^2}n^2}$$

$\sigma^2(a)$ n'est pas nulle pour $a \neq 0$, mais elle s'annule effectivement, ainsi que toutes ses dérivées en $a = 0$. Du point de vue pratique, cela signifie qu'elle ne peut prendre que des valeurs numériques extraordinairement faibles lorsque a est petit.

Forme explicite de la règle de correspondance. — Il reste à calculer explicitement les coefficients T_λ de ce développement limité (IV,2,8). Plutôt que d'utiliser la formule (IV,2,7), peu commode, remarquons que s'il est possible d'obtenir directement un tel développement pour un covariogramme particulier, admettant x^λ comme terme irrégulier d'ordre le plus bas, le coefficient T_λ s'en déduira immédiatement par identification. Nous utiliserons le clavier de Bessel de deuxième espèce, et la formule (IV,1,15). Le covariogramme $x^\mu K_{-\mu}(x)$ admet pour partie irrégulière la série :

$$\frac{-\pi\, 2^{-1-\mu}}{\sin \mu\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-2k}}{k!\,\Gamma(\mu + k + 1)} x^{2(\mu+k)}$$

comme on peut le voir sur la formule (C,2,3) de l'Annexe C, et d'autre part la variance d'estimation, selon (IV,1,15), se met, pour $a < 2\pi$, sous la forme :

$$\sigma^2(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, \Gamma\left(\mu + k + \frac{1}{2}\right)}{2^{\mu+2k}\, \pi^{2\mu+2k}\, \sqrt{\pi}\, k!} S(1 + 2\mu + 2k) a^{1+2(\mu+k}$$

où $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est la série de Riemann. En prenant $\lambda = 2(\mu + k)$, on en déduit immédiatement la valeur du coefficient T_λ de la règle (IV,2,8) :

$$T_\lambda = -2\,\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \sin\frac{\lambda\pi}{2}\, \pi^{-\lambda-\frac{3}{2}} S(1+\lambda).$$

Simplifions cette expression à l'aide de la formule de duplication de la fonction eulérienne, formule (B, 6) de l'Annexe B :

$$T_\lambda = -\sin\frac{\lambda\pi}{2}\frac{\Gamma(1+\lambda)}{2^{\lambda-1}\pi^{1+\lambda}}S(1+\lambda).$$

Introduisons les nombres de Bernouilli généralisés :

$$B_\alpha = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi^\alpha 2^{\alpha-1}}S(\alpha) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi^\alpha 2^{\alpha-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}.$$

En tenant compte, également, de la formule des compléments (B, 4), nous mettons la règle de correspondance sous les deux formes équivalentes suivantes :

(IV,2,9)
$$\begin{cases} T_0(x^\lambda) = T_\lambda a^{1+\lambda} = -2\sin\left(\lambda\frac{\pi}{2}\right)\frac{B_{1+\lambda}}{1+\lambda}a^{1+\lambda}, \\ T_0\left[\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)x^\lambda\right] = \Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)T_\lambda a^{1+\lambda} = \frac{2\pi}{(1+\lambda)\,\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}B_{1+\lambda}a^{1+\lambda}. \end{cases}$$

Sous la première forme, on vérifie que T_λ s'annule lorsque λ est un entier pair $2k$. Sous la deuxième forme, on peut obtenir $T_0(x^{2k}\log x)$ en remplaçant x^λ par $x^\lambda - x^{2k}$ et en faisant tendre λ vers $2k$. Mais il est plus simple de dériver la première forme en λ et de faire $\lambda = 2k$. Ainsi, pour les termes pairs, impairs et logarithmiques, on obtient les expressions suivantes, importantes pour les applications pratiques :

(IV,2,10)
$$\begin{cases} T_0(x^{2k}) = 0, \\ T_0(x^{2k-1}) = \frac{(-1)^k}{k}B_{2k}a^{2k}, \\ T_0(x^{2k}\log x) = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{1+2k}B_{1+2k}a^{1+2k}. \end{cases}$$

Nous donnons, ci-dessous, les valeurs numériques des premiers B_k :

(IV,2,11)
$$\begin{cases} B_2 = 0{,}166\,667 = \frac{1}{6} \\ B_3 = 0{,}058\,153 \\ B_4 = 0{,}033\,333 = \frac{1}{30} \\ B_5 = 0{,}025\,413 \\ B_6 = 0{,}023\,809 = \frac{1}{42} \\ B_7 = 0{,}026\,921 \\ B_8 = 0{,}033\,333 = \frac{1}{30} \end{cases}$$

3. — Calcul des variances d'estimation à plusieurs dimensions.

A plusieurs dimensions, les variances d'estimation se calculent de manière analogue, mais les choses se compliquent un peu. Partant de la formule générale (IV,1,12), on peut montrer qu'il existe, ici encore, un terme fluctuant et un terme d'extension. Le Zitterbewegung — pratiquement imprévisible dans les applications — sera négligé, bien que son ampleur puisse être parfois notable (voir par exemple, la figure 1 du chap. VI). En ce qui concerne le terme d'extension, on établit facilement que le principe de correspondance, terme à terme, avec la partie irrégulière du covariogramme s'applique encore, et ainsi apparaît la possibilité d'obtenir des développements limités de $\sigma^2(a_1 a_2 \ldots a_n)$ ordonnés suivant les puissances croissantes des monomes $(a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n})$. Naturellement, ici encore, il ne s'agit que de développements limités, utilisables seulement pour les petites valeurs des $a_1 a_2 \ldots a_n$. Pour les grandes valeurs de la maille, il est préférable d'utiliser directement (IV,1,12), qui ne contient alors qu'un petit nombre de termes. A la limite, lorsque la maille contient le champ géométrique $(a_1 > b_1, \ldots a_n > b_n)$, il y a au plus un prélèvement positif, et tout se passe comme si ce prélèvement était implanté au hasard dans un parallélépipède P d'arêtes $(a_1, a_2 \ldots, a_n)$ contenant la régionalisation. La formule générale prend alors la forme « aléatoire ».

$$\text{(IV,3,1)} \qquad \sigma^2(a \ldots a_n) = (a_1 a_2 \ldots a_n)\, g(0) - \int g(h)\, dh.$$

Entre les deux cas extrêmes des grandes et des petites mailles, on est souvent réduit à procéder par simple interpolation graphique. Mais, en pratique, cette interpolation ne soulève pas de difficultés, car il se trouve, très souvent, que les développements limités conservent leur valeur même pour des mailles déjà notables.

Le principe de correspondance. — Nous nous limiterons au cas d'un covariogramme isotrope $g(r)$. Si celui-ci admet, au voisinage de l'origine, un développement de la forme :

$$g(r) = \Sigma C_\lambda r^\lambda$$

la variance d'estimation admet un développement limité de la forme :

$$\text{(IV,3,2)} \qquad \sigma^2(a_1 \ldots a_n) = \Sigma C_\lambda T_0(r^\lambda)$$

où les $T_0(r^\lambda)$ sont des expressions polynomiales de degré $\lambda + n$ par rapport aux $(a_1, a_2 \ldots a_n)$. Nous allons donner l'expression théorique de $T_0(r^\lambda)$ dans le cas général, puis l'expliciter dans le cas particulier de l'espace à 2 dimensions.

Pour établir l'expression générale de $T_0(r^\lambda)$, nous ferons le raisonne-

ment rapide suivant : Dans l'espace à n dimensions, r^λ a pour transformée de Fourier, selon (A,8,22) la fonction :

$$G(\rho) = \mathcal{F}_n r^\lambda = \pi^{-\lambda-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \rho^{-\lambda-n}.$$

Appliquons à $G(\rho)$ la formule générale (IV,1,10). On obtient ainsi l'expression de $T_0(r^\lambda)$ sous la forme suivante :

$$\text{(IV,3,3)} \quad T_0(r^\lambda) = \frac{\pi^{-\lambda-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \sum_{p_1 p_2 \dots p_n \neq 0} \frac{1}{\left[\frac{p_1^2}{a_1^2} + \frac{p_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{p_n^2}{a_n^2}\right]^{\frac{\lambda+n}{2}}}$$

La somme multiple qui figure dans le deuxième membre est étendue à tous les systèmes d'entiers positifs ou négatifs $(p_1, p_2 \dots p_n)$ à l'exception du seul système $(p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0)$.

Ce raisonnement rapide n'est pas correct, puisque les opérations effectuées sur r^λ et $\rho^{-\lambda-n}$ ne sont pas légitimes. Mais le lecteur vérifiera facilement que le résultat obtenu peut se justifier rigoureusement, en raisonnant, comme nous l'avons d'ailleurs fait dans le cas $n = 1$, sur un clavier de Bessel contenant un terme en r^λ : le clavier de Bessel utilisé sert simplement d'intermédiaire, et le résultat final obtenu, qui est (IV,3,3), a valeur générale.

Composition du terme de ligne et du terme de tranche. — Naturellement, le calcul direct de (IV,3,3) serait malaisé dans les applications. Nous allons chercher à dégager une formule d'approximation, en nous limitant d'abord à deux dimensions seulement $(n = 2)$. La formule générale prend, pour $n = 2$, la forme :

$$\text{(IV,3,4)} \quad T_0(r^\lambda) = \frac{\pi^{-\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \sum_{p_1 p_2 \neq 0} \frac{1}{\left[\frac{p_1^2}{a_1^2} + \frac{p_2^2}{a_2^2}\right]^{1+\frac{\lambda}{2}}}.$$

Dans toute la suite, nous supposerons $a_2 \leqslant a_1$. Dans le réseau de prélèvements, nous distinguerons des lignes de plus grande densité, lignes le long desquelles les prélèvements sont espacés de a_2. Faisons, à la limite, $a_2 = 0$, ce qui revient, en fait, à effectuer une montée le long de ces lignes de plus grande densité. Dans cette montée, le terme r^λ (à une partie régulière près) est devenu, selon (II,1,9), $\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} r^{1+\lambda}$, et cette expres-

sion figure dans le covariogramme de la nouvelle variable à une seule dimension obtenue en montant le long des lignes. La variance d'estimation, dans la reconnaissance de cette nouvelle variable selon la maille a_1, est donc nécessairement égale à

$$\frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} T_{1+\lambda}\ a_1^{2+\lambda},$$

le T_λ ayant l'expression (IV,2,9). De fait, si nous faisons $a_2 = 0$ dans la formule (IV,3,4), seuls subsistent les termes correspondant à $p_2 = 0$, et l'on vérifie immédiatement que l'on a bien :

$$\text{(IV,3,5)}\quad 2\frac{\pi^{-\lambda-1}\,\Gamma\left(1+\frac{2}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} a_1^{2+\lambda} \sum_{p_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{\lambda+2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{2}{\lambda}\right)} T_{1+\lambda}\ a_1^{2+\lambda}.$$

Nous avons ainsi obtenu le terme principal de $T_0(r^\lambda)$, relativement au rapport $\frac{a_2}{a_1}$ supposé très petit. Ce terme représente l'extension des lignes de plus grande densité (supposées parfaitement reconnues) dans les tranches à deux dimensions qui les séparent. Nous l'appellerons *terme de tranche.*

Lorsqu'a_2 n'est pas nul, naturellement, on n'a pas le droit de négliger les termes de (IV,3,4) correspondant aux entiers p_2 non nuls. Considérons les termes pour lesquels $p_2 = q$ a une même valeur q, et mettons-les sous la forme suivante :

$$\text{(IV,3,6)}\quad 2\pi^{-\lambda-1}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\left(\frac{a_2}{q}\right)^{2+\lambda}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\left[1+p^2\frac{a_2^2}{a_1^2q^2}\right]^{1+\frac{\lambda}{2}}}.$$

Pour évaluer la somme (prise sur l'indice p), nous pouvons appliquer la formule sommatoire de Poisson (A,4,3) à la fonction $(1+bx^2)^{-\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}$, dont la transformée de Fourier est donnée en (A,8,27). On obtient ainsi :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+n^2b^2)^{1+\frac{\lambda}{2}}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{b}\,\frac{2^{\frac{1-\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^{\frac{1+\lambda}{2}} K_{-\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)}\left(\frac{2\pi n}{b}\right).$$

On vérifiera facilement, sur le développement (C,2,3), que $x^{\frac{1+\lambda}{2}} K_{1+\lambda}(x)$ prend, en $x = 0$, la valeur $2^{\frac{\lambda-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)$. Si nous séparons, dans l'ex-

pression ci-dessus, les termes correspondant à $n = 0$, il vient :

$$(IV,3,7)\quad 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n^2b^2)^{1+\frac{\lambda}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{b}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}-1 + \frac{2^{\frac{3-\lambda}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi n}{b}\right)^{\frac{1+\lambda}{2}}K_{-\frac{1+\lambda}{2}}\left(\frac{2\pi n}{b}\right)$$

Lorsque b tend vers 0, la série qui figure au deuxième membre décroît plus vite que toute puissance de b, à cause de la décroissance exponentielle, à l'infini, des fonctions de Bessel $K_{-\frac{1+\lambda}{2}}$. Elle n'apporte aucune contribution à un développement limité en b. Posons maintenant :

$$b=\frac{a_2}{a_1 q}$$

et portons le résultat obtenu en (IV,3,7) dans l'expression (IV,3,6) du terme général en q. Celle-ci devient :

$$\pi^{-\lambda-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\frac{a_1a_2^{1+\lambda}}{q^{1+\lambda}}-\pi^{-\lambda-1}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\frac{a_2^{2+\lambda}}{q^{2+\lambda}}+R_q\left(\frac{a_2}{a_1q}\right)a_2^{2+\lambda}$$

D'après ce qui précède, nous savons que le terme complémentaire R_q décroît plus vite que toute puissance de $\left(\frac{a_2}{a_1q}\right)$ lorsque a_2 tend vers zéro. L'expression obtenue doit être, enfin, sommée sur toutes les valeurs entières non nulles, positives ou négatives, de l'entier q. On vérifie facilement, à l'aide de (IV,2,9), que l'on a :

$$\begin{cases} 2\pi^{-\lambda-\frac{1}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+\lambda}}=T_\lambda \\ 2\pi^{-\lambda-1}\dfrac{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{2+\lambda}}=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}T_{1+\lambda} \end{cases}$$

Compte-tenu, aussi, du terme de tranche $(q = 0)$, nous obtenons finalement l'expression suivante de $T_0(r^\lambda)$:

$$(IV,3,8)\qquad T_0(r^\lambda)=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}T_{1+\lambda}\left(a_1^{2+\lambda}-a_2^{2+\lambda}\right)+T_\lambda a_1a_2^{1+\lambda}+R_\lambda\left(\frac{a_2}{a_1}\right)a_2^{2+\lambda}.$$

Du terme complémentaire $R_\lambda\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$, nous ne savons pas grand chose, sinon qu'il est positif, et décroît plus rapidement que toute puissance de $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$ lorsque a_2 tend vers 0. Nous le négligerons et, en compensation, nous négligerons aussi $a_2^{2+\lambda}$ devant $a_1 a_2^{1+\lambda}$, et nous conserverons seulement les deux premiers termes du développement :

$$\text{(IV,3,9)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} T_0(r^\lambda) = \sqrt{\pi}\, \dfrac{\Gamma\left(-\dfrac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)}\, T_{1+\lambda}\, a_1^{2+\lambda} + T_\lambda a_1 a_2^{1+\lambda} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a_2 < a_1) \end{array} \right.$$

Pour des valeurs de λ pas trop élevées (inférieures à 7 ou 8), la formule (IV,3,9) donne encore des résultats utilisables pour $a_2 = a_1$. Naturellement, lorsque a_2 est supérieur à a_1 on doit échanger les rôles de a_1 et a_2.

On voit apparaître, sur (IV,3,9), *le principe de composition du terme de tranche et du terme de ligne.* Le terme de tranche en $a_1^{2+\lambda}$ représente, nous l'avons vu, la variance d'estimation à une dimension calculée pour la maille a_1 et la variable obtenue après montée le long des lignes. Le terme en $a_1 a_2^{1+\lambda}$ est appelé *terme de ligne.* On remarque que $T_\lambda a_2^{1+\lambda}$ n'est pas autre chose que la variance à une seule dimension calculée sur le covariogramme en x^λ pour la maille a_2.

Soit alors $g_2(r)$ un covariogramme à deux dimensions, $g_1(r)$ le covariogramme qui s'en déduit par montée,

$$\sigma_1^2(a) \qquad \text{et} \qquad \sigma_2^2(a)$$

les variances d'estimation à une seule dimension calculées sur g_1 et g_2 pour une maille a' et $\sigma^2(a_1, a_2)$ la variance à deux dimensions calculée sur g_2 : le principe de composition peut s'écrire :

$$\text{(IV,3,10)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sigma^2(a_1, a_2) = \sigma_1^2(a_1) + a_1 \sigma_2^2(a_2) \\ \qquad\qquad (a_1 > a_2) \end{array} \right.$$

Valable avec la même approximation que (IV,3,9), ce principe exprime que *l'on peut regarder comme indépendantes l'estimation des lignes de plus grande densité à partir des prélèvements et celle des tranches à partir des lignes* (supposée parfaitement reconnues), et par suite composer les variances d'estimation correspondantes, comme s'il s'agissait de variables aléatoires indépendantes (au sens usuel du calcul des probabilités). Cette justification intuitive permet de comprendre pourquoi la formule (IV,3,9) est encore utilisable pour $a_1 = a_2$ et pour des valeurs de λ déjà notables ($\lambda = 6$ ou 7).

Dans les applications, on utilisera surtout les résultats relatifs aux valeurs entières de λ et aux termes logarithmiques en $r^{2k} \log r$. De (IV,3,9),

on déduit sans difficulté :

(IV,3,11)

$$\begin{cases} T_0(r^{2k}) = 0 \\ T_0(r^{2k-1}) = \dfrac{(-1)^k 2^{2-2k}(2k-2)!}{\left(k+\dfrac{1}{2}\right)[(k-1)!]^2} B_{1+2k} a_1^{1+2k} + \dfrac{(-1)^k}{k} B_{2k} a_1 a_2^{2k} \\ T_0(r^{2k} \log r) = \dfrac{(-1)^{k+1} 2^{2+2k}(k!)^2}{(2k+3)!} \pi B_{2+2k} a_1^{2+2k} + \dfrac{(-1)^{k+1}}{1+2k} \pi B_{1+2k} a_1 a_2^{1+2k} \end{cases}$$

En particulier, toujours avec $a_1 \geqslant a_2$

(IV,3,12)

$$\begin{cases} T_0(r) = -\dfrac{1}{6} a_1 a_2^2 - 0{,}060\,9\, a_1^3 \\ T_0(r^2 \log r) = 0{,}060\,9\, a_1 a_2^3 + 0{,}034\,90\, a_1^4 \\ T_0(r^3) = \dfrac{1}{60} a_1 a_2^4 + 0{,}011\,98\, a_1^5 \end{cases}$$

Généralisation à plus de 2 dimensions. — Enfin, le principe de composition se généralise au cas où il y a plus de deux dimensions. Pour $n = 3$, par exemple, avec $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$, et en désignant par $\sigma_3^2(a)$, $\sigma_2^2(a)$ et $\sigma_1^2(a)$ les variances d'estimation à une dimension calculées, respectivement, sur le covariogramme g_3 de la variable à estimer, et les covariogrammes g_2 et g_1 qui s'en déduisent par montée d'ordre 1 et 2, on aura :

(IV,3,13) $\sigma^2(a_1, a_2, a_3) = \sigma_1^2(a_1) + a_1 \sigma_2^2(a_2) + a_1 a_2 \sigma_3^2(a_3)$.

On voit apparaître et se composer un terme de tranche, un terme de section et un terme de ligne, et tout se passe comme si les estimations des tranches par les sections, des sections par les lignes, et des lignes par les prélèvements étaient faites indépendamment les unes des autres. Le principe de correspondance permet, de même, de calculer facilement l'apport $T_0(r^\lambda)$ à cette variance à 3 dimensions du terme en r^λ de la partie irrégulière du covariogramme :

(IV,3,14)

$$T_0(r^\lambda) = -\frac{2\pi}{\lambda+2} T_{2+\lambda} a_1^{3+\lambda} + \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\dfrac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)} T_{1+\lambda} a_1 a_2^{2+\lambda} + T_\lambda a_1 a_2 a_3^{1+\lambda}.$$

Cas des mailles régulières non rectangulaires. — Il arrive souvent, en pratique, que les réseaux de prélèvements soient construits sur des parallélogrammes quelconques (à 2 dimensions) ou des parallélépipèdes obliques (à 3 dimensions). Le principe de composition s'étend de lui-même et les formules établies subsistent : il suffit, pour $n = 2$, de prendre pour a_2 la distance entre prélèvements sur les lignes de plus grande densité, et, pour a_1, la distance entre ces lignes. De même, à 3 dimensions, a_3 représentera la maille sur les lignes de plus grande densité, a_2 la plus petite distance entre deux telles lignes, et a_1 l'espacement des plans de plus grande densité.

Quant à la formule générale (IV,1,12), on vérifiera qu'elle subsiste moyennant de très légères modifications : si l'on désigne par a, b, c... *les vecteurs* de base de la maille, tels que les prélèvements soient effectués aux points $y + p_a a + p_b$, $b + p_c c$, p_a, p_b, p_c entiers quelconques, et par $v = (a, b, c)$ le volume du parallélépipède de base de la maille, on a

(IV,3,15)

$$\sigma^2(a, b, c \ldots) = (a, b, c \ldots) \sum_{p_a, p_b, p_c} g(p_a a + p_b b + p_c c + \cdots) - \int g(h)\, dh.$$

4. — Mailles aléatoires stratifiées.

Il arrive parfois, en pratique, que les réseaux de prélèvements ne soient pas construits selon une maille régulière, mais selon le type dit stratifié au hasard, dans lequel chaque point de prélèvement est choisi à l'intérieur d'une « zone d'influence » selon un procédé de tirage au sort donnant à chaque point de la zone d'influence la même probabilité d'être tiré. Lorsque ces zones d'influence sont jointives, égales entre elles, et ne se recouvrent pas, on parle de maille stratifiée aléatoire. A deux dimensions, ces zones d'influence peuvent être des parallélogrammes ou des hexagones. A trois dimensions, ce sont généralement des parallélépipèdes obliques ou rectangles. Nous nous proposons, dans ce paragraphe de définir et de calculer la variance d'estimation associée à une maille aléatoire statifiée, et de la comparer avec celle de la maille régulière construite sur les mêmes zones d'influence.

Pour simplifier les notations, nous supposerons que la zone d'influence est un parallélépipède rectangle P d'arêtes $a = (a_1 a_2 \ldots a_n)$ parallèles aux axes de coordonnées, mais les résultats obtenus s'étendront d'eux-mêmes à d'autres types de polyèdres. Si l'on connaît la position

$$v = (v_1 v_2 \ldots v_n)$$

du centre de l'une des zones d'influence, les centres de toutes les autres sont disposés aux points $v + ka = (v_1 + k_1 a_1, \ldots, v_n + k_n a_n)$, k désignant un système d'entiers quelconques $(k_1 k_2 \ldots k_n)$. Dans la zone d'influence P_k de centre $v + ka$, on implante au hasard un point de prélèvement, selon une loi de probabilité uniforme. Nous désignerons par

$$v + ka + u_k$$

ce point de prélèvement. Tout se passe, en fait, comme si un point u_k était tiré au sort dans le parallélépipède P centré à l'origine. Nous désignerons par $\varpi(x)$ la variable géométrique associée à P centré à l'origine, et par $\pi(h) = \varpi * \check{\varpi}$ son covariogramme géométrique. La variable régionalisée qu'il s'agit d'estimer est désignée par $f(x)$, et son covariogramme par $g(h)$. Les renseignements disponibles, qui sont les valeurs numériques des $f(v + ka + u_k)$ pour tous les systèmes d'entiers k, per-

mettent de former l'estimation Q* de la quantité de métal, selon la formule suivante :

$$\text{(IV,4,1)} \qquad Q^* = |a| \sum_k f(\varphi + ka + u_k)$$

Q* apparaît comme une variable aléatoire, relativement aux u_k tirés indépendamment au sort selon une loi de probabilité uniforme dans P, et aussi relativement à la position de l'origine φ du réseau, que l'on peut également considérer comme tirées au sort dans P comme les u_k, mais indépendamment d'eux (il est, en effet, indifférent de prendre comme origine φ ou l'un quelconque des $\varphi + ka$). Nous raisonnerons d'abord à φ fixé. A φ fixé, l'espérance mathématique de Q* est :

$$E(Q^*|\varphi) = |a| \sum_k \frac{1}{|a|} \int_P f(\varphi + ka + u_k)\, du_k = \int f(x)\, dx = Q.$$

Elle est naturellement égale à la vraie valeur de la quantité de métal, ainsi, par conséquent, que l'espérance à priori de Q* (relativement à la fois aux u_k et à φ) :

$$\text{(IV,4,2)} \qquad E(Q^*) = E(Q^*|\varphi) = Q.$$

Passons aux variances, et posons pour abréger :

$$f_k = f(\varphi + ka + u_k).$$

Pour calculer la variance à φ fixé, formons le carré :

$$[Q^*]^2 = |a|^2 \sum_{kp} f_k f_p.$$

Pour $k \neq p$, f_k et f_p sont indépendants à φ fixé (puisque u_k et u_p sont indépendants).

Pour $k = p$, la variance de f_k apparaît. Ainsi, on a :

$$\begin{cases} E(f_k f_k|\varphi) = \overline{E(f_k|\varphi)^2} + D^2(f_k|\varphi) \\ E(f_k f_p|\varphi) = E(f_k|\varphi)\, E(f_p|\varphi). \end{cases}$$

On en tire, d'après (IV,4,2)

$$\begin{cases} E(Q^{*2}|\varphi) = |a|^2 \sum_{kp} E(f_k|\varphi)\, E(f_p|\varphi) + |a|^2 \sum_k D^2(f_k|\varphi) \\ \qquad\qquad = Q^2 + |a|^2 \sum_k D^2(f_k|\varphi). \end{cases}$$

D'où l'expression de la variance, lorsque l'origine φ du réseau est fixée.

$$\text{(IV,4,3)} \qquad D^2(Q^*|\varphi) = |a|^2 \sum_k D^2(f_k|\varphi).$$

Comme $E(Q^*|\varphi) = Q$ ne dépend pas de φ, on aura la variance à priori $D^2(Q^*)$, qui est la variance d'estimation cherchée, en prenant la valeur probable relativement à φ de $D^2(Q^*|\varphi)$. Pour expliciter son expression, introduisons la variable :

$$y(x) = \frac{1}{|a|}\int_P f(x+u)\,du = \frac{1}{|a|}\, f * \overset{\vee}{\varpi}$$

égale à la valeur moyenne $y(x)$ de la variable f dans le parallélépipède P centré au point x (teneur moyenne de ce parallélépipède). On a :

$$D^2(f_k|\varphi) = \frac{1}{|a|}\int_P f^2(\varphi + ka + u)\,du - [y(\varphi + ka)]^2.$$

Portons ce résultat dans (IV,4,3) : il vient :

$$D^2(Q^*|\varphi) = |a|\int f^2(x)\,dx - |a|^2 \sum_k [y(\varphi + ka)]^2$$
$$= |a| g(0) - |a|^2 \sum_k [y(\varphi + ka)]^2.$$

Le premier terme est indépendant de φ. Le deuxième, lorsque l'origine φ du réseau est choisie au hasard dans P, a pour valeur probable :

$$|a|^2 E\left[\sum_k y^2(\varphi + ka)\right] = |a|\int \overline{y(x)^2}\,dx = |a|\, g_p(0)$$

$g_P(h)$ désignant le covariogramme de $y(x)$, égal à :

$$g_P(h) = \frac{1}{|a|^2}\, g * \varpi * \overset{\vee}{\varpi} = \frac{1}{|a|^2}\, g * \pi.$$

D'où, finalement, le résultat cherché :

(IV,4,4) $$\sigma^2(a) = D^2(Q^*) = |a|[g(0) - g_P(0)]$$

ou encore, sous forme explicite :

(IV,4,5) $$\sigma^2(a) = |a|\left[g(0) - \frac{1}{|a|^2}\int g(h)\,\pi(h)\,dh\right]$$

Si nous nous reportons à la signification de l'algorithme de Cauchy (I,2,9), nous voyons que la variance d'estimation est le produit du volume $|a|$ de la maille par la différence entre $g(0)$ et la valeur moyenne de $g(h)$ dans le parallélépipède de base P. Elle ne dépend que du comportement de $g(h)$ dans ce parallélépipède, et prend une valeur d'autant plus élevée que la décroissance de $g(h)$ dans P est plus rapide — donc que la régionalisation est moins régulière.

Mailles adaptées. — Une maille aléatoire stratifiée sera dite *adaptée* si elle réalise le minimum de la variance d'estimation (IV,4,5) pour un même volume $|a|$ de maille, c'est-à-dire pratiquement pour un même nombre

de prélèvements. Dans le cas d'un covariogramme isotrope $g(r)$, cette maille adaptée est construite sur un polyèdre régulier. A deux dimensions, par exemple, on obtient les hexagones réguliers et les carrés, avec d'ailleurs une infime supériorité pour la maille hexagonale, dans la mesure même où l'hexagone se rapproche davantage du cercle que le carré.

De la même manière, une maille régulière sera dite adaptée si elle réalise le minimum, à $|a|$ fixé, de la variance d'estimation (IV,1,12). Pour un même $g(h)$, il n'est pas évident que les mailles adaptées régulières et aléatoires stratifiées soient construites sur les mêmes polyèdres, mais ce sera généralement le cas : tout dépend de la nature de l'anisotropie que présente le covariogramme $g(h)$ au voisinage de l'origine. Pour un covariogramme isotrope $g(r)$, ou présentant une anisotropie susceptible d'être corrigée par une transformation linéaire des coordonnées, on est assuré que les polyèdres adaptés coincident.

En règle générale, *la maille régulière adaptée donnera toujours de meilleurs résultats, que la maille aléatoire stratifiée adaptée.* Il ne peut y avoir d'exception que pour un covariogramme aberrant, comportant une composante harmonique d'ampleur exceptionnellement élevée pour une période qui soit, justement, l'une des périodes du réseau.

Par contre, de deux mailles non adaptées construites sur un même polyèdre, l'une régulière et l'autre aléatoire stratifiée, il n'est pas possible, en général, de prévoir à priori laquelle donnera les meilleurs résultats.

CHAPITRE V

REPRÉSENTATION TRANSITIVE DES CORÉGIONALISATIONS

SOMMAIRE

Les résultats des chapitres précédents se généralisent aux coregionalisations, c'est-à-dire au cas où plusieurs variables sont définies dans le même champ. L'indépendance de deux variables peut se définir en deux sens différents, non équivalents : l'indépendance interne ou l'absence de corrélation différée. Les trois premiers paragraphes sont importants dans les applications (estimation simultanée de plusieurs variables ; par exemple, dans un gisement minier, estimation simultanée de la teneur moyenne et des tonnages minerai et métal).

Le paragraphe 1, *de lecture facile, définit la matrice de covariation* $C_{ij}(h)$, *généralisation du covariogramme. La covariance des estimations simultanées des deux variables* f_i *et* f_j *se calcule, à partir de* C_{ij}, *de la même manière qu'une variance d'estimation à partir de* $g(h)$.

Le paragraphe 2 *définit l'indépendance interne de deux variables* f_i *et* f_j *par la condition que* $f_i(x)$ *et* $f_j(x)$ *et toutes leurs régularisées soient indépendantes, au sens ordinaire. La condition s'écrit* $C_{ij}(h) = m_i m_j K(h)$, $K(h)$ *étant le covariogramme géométrique.*

Le paragraphe 3 *applique cette notion au cas d'une variable* $f(x)$ *et de la variable géométrique* $k(x)$ *associée à son champ et formule la condition d'indépendance interne de la variable et de son champ (absence de dérive zonée).*

Le paragraphe 4 *reprend la notion usuelle de corrélation différée, corrélation entre* $f_i(x)$ *et* $f_j(x + h)$, *et montre que l'absence de corrélation différée n'entraîne pas l'indépendance interne, ni réciproquement. Entre une variable et son champ une corrélation différée traduit l'existence d'une dérive orientée.*

1. — La matrice de covariance.

Il arrive souvent que l'on ait affaire à plusieurs variables régionalisées, définies sur un même support, ponctuel ou non. Nous parlerons, dans ce cas, de corégionalisation, et nous devrons attacher une importance particulière aux corrélations pouvant lier les différentes composantes de la coré-

gionalisation. Outre les corrélations directes, reliant les valeurs $f_i(x)$ et $f_j(x)$ de deux variables en un même point x, il convient également de considérer les corrélations « différées » reliant les valeurs de $f_i(x)$ et $f_j(x+h)$ en deux points distincts.

Supposons donc que, dans un champ V défini, conformément à la formule (I, 1, 1) par la variable géométrique habituelle $k(x)$, de covariogramme :

$$\text{(V,1,1)} \qquad K(h) = k * \check{k}$$

se distribuent, simultanément, plusieurs variables régionalisées $f_1(x)$, $f_2(x)$... à support ponctuel. A la variable $f_i(x)$ est associé son covariogramme transitif $g_i(h)$, défini par :

$$\text{(V,1,2)} \qquad g_i = f_i * \check{f}_i$$

Pour définir commodément la matrice de covariation, nous allons introduire une nouvelle variable régionalisée :

$$\text{(V,1,3)} \qquad f(x, \lambda_i) = \sum_i \lambda_i f_i(x)$$

combinaison linéaire des variables f_i données, avec des coefficients λ^i réels quelconques. A cette nouvelle variable est attaché le covariogramme :

$$\text{(V,1,4)} \quad g(h, \lambda_i) = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j f_i * \check{f}_j = \sum_i \lambda_i^2 g_i(h) + \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j [f_i * \check{f}_j + \check{f}_i * f_j]$$

Dans certaines questions, il pourra y avoir intérêt à considérer séparément chacune des deux composantes $f_i * \check{f}_j$ et $\check{f}_i * f_j$ des termes rectangulaires. Le plus souvent, ils n'interviendront que par l'intermédiaire de l'expression symétrique :

$$\text{(V,1,5)} \qquad C_{ij}(h) = C_{ji}(h) = \frac{1}{2} [f_i * \check{f} + \check{f}_i * f_j]$$

Le covariogramme (V,1,4) peut alors s'écrire :

$$g(h, \lambda_i) = \sum_i \lambda_i^2 g_i + 2 \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j C_{ij}$$

On posera, comme il est naturel :

$$C_{ii}(h) = g_i(h)$$

de sorte que (V,1,4) s'écrira, sous forme symétrisée :

$$\text{(V,1,6)} \qquad g(h, \lambda_i) = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j C_{ij}(h)$$

Le terme $C_{ij}(h)$ sera appelé *covariogramme rectangulaire* associé aux variables f_i, et f_j, et la matrice des covariogrammes rectangulaires

sera dite *matrice de covariation*. La formule (V,1,6) permet d'étendre aux $C_{ij}(h)$ à peu près toutes les propriétés des covariogrammes $g(h)$. Il suffit, pour cela, de remarquer que $g(h, \lambda_i)$ doit vérifier chacune de ces propriétés, quels que soient les λ_i et les λ_j, et de procéder par identification. Ainsi les C_{ij} montent de la même manière qu'un covariogramme, et, si l'on régularise f_i et f_j par une fonction de prélèvement ou de pondération p de covariogramme $P = p * \check{p}$, les régularisées $f_i * \check{p}$ et $f_j * \check{p}$ ont $C_{ij} * P$ comme covariogramme rectangulaire.

Le terme $C_{ij}(h)$ exprime, à sa manière, la corrélation reliant $f_i(x)$ et $f_j(x + h)$. Pour préciser sa signification, imaginons que nous disposions, pour estimer la quantité de métal

$$\text{(V,1,7)} \qquad Q(\lambda_i) = \sum_i \lambda_i Q_i$$

associée à la variable $f(x, \lambda_i)$ définie en (V,1,3), d'un réseau de prélèvements ponctuels implantés selon une maille rectangulaire $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a$. La variance d'estimation $\sigma^2(a)$ s'obtient en faisant agir sur le covariogramme g l'opérateur linéaire $\mathcal{E}_a$, défini, conformément à (IV,1,12) par la formule :

$$\text{(V,1,8)} \quad \sigma^2(a) = \mathcal{E}_a(g) = |a_1, a_2 \ldots a_n| \sum_{k_1 \cdots k_n} g(k_1 a_1, \ldots, k_n a_n) - \int g(h)\, dh.$$

Cet opérateur étant manifestement linéaire, la variance associée à l'estimation de la quantité de métal $Q(\lambda_i)$ prend l'expression suivante :

$$\text{(V,1,9)} \quad \sigma^2(a, \lambda_i) = \mathcal{E}_a[g(h, \lambda_i)] = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \mathcal{E}_a(Cij)$$

$$= \sum_i \lambda_i^2 \mathcal{E}_a(g_i) + 2 \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j \mathcal{E}a(C_{ij}).$$

Dans cette relation, $\mathcal{E}_a(g_i)$ est naturellement égale à la variance de l'estimation de la quantité de métal Q_i relative à la relative variable f_i, variance que l'on peut noter $\sigma_i^2(a)$. Si nous désignons de même par $\sigma_{ij}(a)$ la covariance des estimations simultanées de Q_i et Q_j, on a nécessairement :

$$\sigma^2(a, \lambda_i) = \sum_i \lambda_i^2 \sigma_i^2(a) + 2 \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j\, \sigma_{ij}(a)$$

Il suffit, puisque les λ_i sont quelconques, d'identifier le terme en $\lambda_i \lambda_j$ avec celui de (V,1,9) pour obtenir :

$$\text{(V,1,10)} \qquad \sigma_{ij}(a) = \mathcal{E}_a(C_{ij})$$

Ainsi, la covariance de l'estimation simultanée de Q_i et Q_j par une même maille de prélèvements s'obtient en appliquant au covariogramme rectangle C_{ij} le même opérateur linéaire $\mathcal{E}_a$ qui sert au calcul d'une variance d'estimation ordinaire $\sigma^2(a)$.

2. — Condition d'indépendance interne.

En général, la covariance d'estimation définie en (V,1,10) ne sera pas nulle, et les quantités de métal Q_i et Q_j ne seront pas estimées indépendamment l'une de l'autre, même si f_i et f_j apparaissent comme indépendentes, au sens statistique usuel. Liées à un même champ géométrique V, ces deux variables ne peuvent certainement pas être « indépendantes » dans l'absolu. En l'absence de toute autre cause de liaison, le fait d'avoir même champ géométrique, entraîne, par exemple, pour des variables f_i et f_j ne prenant que des valeurs positives, une valeur nécessairement positive de la covariance d'estimation $\mathcal{E}_a(C_{ij})$. Si le réseau de prélèvements a été implanté, par hasard, de telle manière qu'il conduise à surestimer l'évaluation du volume du champ V, il en résulte, toutes choses égales d'ailleurs, une tendance à surestimer simultanément les deux quantités de métal Q_i et Q_j — et inversement.

La notion usuelle d'indépendance de f_i et f_j est une notion interne au champ V. Nous verrons, dans la deuxième partie, qu'elle s'exprime plus commodément dans la théorie dite intrinsèque. Elle correspond au cas où la covariance directe, ou ordinaire, des variables ponctuelles $f_i(x)$ et $f_j(x)$ est égale à 0. Avec nos notations, cette indépendance, au sens usuel, se traduit par la relation :

$$\text{(V,2,1)} \qquad C_{ij}(0) = m_i m_j K(O) = \frac{Q_i Q_j}{K(O)}$$

$K(O)$ étant égal au volume du champ géométrique V, selon (1,1,5), et m_i, m_j désignant les moyennes $\dfrac{Q_i}{K(O)}$ et $\dfrac{Q_j}{K(O)}$ des variables f_i et f_j dans V.

Mais il faut bien voir que la relation (V,2,1) n'exprime que l'indépendance (usuelle) des variables ponctuelles. Elle n'entraîne en aucune manière l'indépendance des variables non ponctuelles, que l'on peut en déduire par les procédés habituels de régularisation et de prélèvements. Soit, en effet, p une fonction de pondération ou de prélèvement, de covariogramme $P = p * \check{p}$ Les variables y_i et y_j, ou teneurs moyennes de f_i et f_j dans ce prélèvement, sont définies par :

$$\text{(V,2,2)} \qquad \begin{cases} y_i = \dfrac{1}{\varphi} f_i * \check{p} \\ y_j = \dfrac{1}{\varphi} f_j * \check{p} \\ \left(\varphi = \displaystyle\int p(x)\, dx \right) \end{cases}$$

Ces nouvelles variables y_i et y_j ont le covariogramme rectangulaire.

$$\frac{1}{\varphi^2} C_{ij} * P = \frac{1}{\varphi^2} \int P(h - u) C_{ij}(u)\, du$$

Mais, pour prendre en compte l'effet de bavure qui se produit aux frontières du champ, lorsque l'on passe aux variables à support non ponctuel, le covariogramme géométrique K du champ V doit également être remplacé par

$$\frac{1}{\rho^2} K * P = \frac{1}{\rho^2} \int P(h - u)K(u)\, du$$

On vérifie que la régularisation par p ne modifie ni les quantités de métal $\frac{1}{\rho} \int f_i * \check{p}\, dx = Q_i$, ni le « volume » généralisé

$$\frac{1}{\rho} \int k * \check{p}\, dx = K(0) = V,$$

donc ne change pas les moyennes m_i et m_j. Pour que les variables y_i et y_j soient encore indépendantes, au sens usuel, nous devons donc avoir, selon (V,2,1) :

$$\text{(V,2,3)} \qquad \int P(u)C_{ij}(u)\, du = m_i m_j \int P(u)K(u)\, du$$

Mais cette relation n'est pas du tout une conséquence nécessaire de (V,2,2). Pour que les variables régularisées y_i et y_j soient indépendantes au sens usuel, quelle que soit la fonction de pondération ou de prélèvement p, c'est-à-dire pour que (V,2,3) soit vérifiée pour tout covariogramme $P(u)$, il est nécessaire et suffisant que l'on ait :

$$\text{(V,2,4)} \qquad C_{ij}(h) = m_i m_j K(h)$$

c'est-à-dire que *le covariogramme rectangle* C_{ij} *soit proportionnel au covariogramme géométrique* K. Lorsque cette relation est vérifiée, nous dirons que les deux variables f_i et f_j vérifient la condition *d'indépendance interne* (interne au champ V). C'est là, en fait, une condition *extrêmement sévère*, qui ne pourra jamais être rigoureusement vérifiée en pratique. Mais, si les fluctuations de $C_{ij}(h)$ de part et d'autre de $m_i m_j K(h)$ n'ont pas une trop grande ampleur, on pourra souvent admettre l'indépendance interne à titre d'approximation. Dans la deuxième partie, nous retrouverons cette relation (V,2,4) et nous l'interpréterons, d'un point de vue stochastique, comme une relation entre valeurs probables de certaines grandeurs aléatoires.

Lorsque la condition (V,2,4) de l'indépendance interne est vérifiée, la covariance $\mathcal{E}_a(C_{ij})$ des estimations simultanées des quantités de métal Q_i et Q_j se met sous la forme :

$$\text{(V,2,5)} \qquad \sigma_{ij}(a) = \mathcal{E}_a(C_{ij}) = m_i m_j \mathcal{E}_a(K) = m_i m_j \sigma_v^2$$

La variance $\sigma_v^2 = \mathcal{E}_a(K)$ n'est autre que la variance d'estimation du volume V du champ géométrique, appelée parfois brièvement *variance géométrique*. En pareil cas, la variance relative de l'erreur commise dans

l'estimation du rapport Q_i/Q_j peut se mettre — en première approximation — sous la forme :

$$\text{(V,2,6)} \qquad \frac{\sigma_i^2(a)}{Q_i^2} + \frac{\sigma_j^2(a)}{Q_j^2} - \frac{2\sigma_{ij}(a)}{Q_iQ_j} = \frac{\sigma_i^2(a)}{Q_i^2} + \frac{\sigma_j^2(a)}{Q_j^2} - 2\frac{\sigma_v^2}{V^2}.$$

En général, la condition d'indépendance interne (V,2,4) ne sera pas vérifiée, et la valeur de la différence

$$\text{(V,2,7)} \qquad C_{ij}(h) - m_im_jK(h)$$

donnera une idée de la corrélation régnant à la fois entre $f_i(x)$ et $f_j(x+h)$ et entre $f_i(x+h)$ et $f_j(x)$: le C_{ij} défini en (V,2,5), étant symétrisé, ne permet pas de séparer ces deux corrélations. Nous exprimerons au paragraphe 4 les corrélations différées sous une forme non symétrisée, permettant de séparer les effets relatifs à $+h$ et à $-h$, c'est-à-dire de mettre en évidence le phénomène de l'avance d'une variable sur l'autre. Mais remarquons tout de suite que si l'expression (V,2,7) prend, pour $|h|$ petit, des valeurs positives, elle doit nécessairement, par compensation, prendre des valeurs négatives pour $|h|$ plus grand. En effet, l'intégrale totale de l'expression (V,2,7) est toujours nulle. On a toujours :

$$\text{(V,2,8)} \qquad \int C_{ij}(h)\,dh = Q_iQ_j = m_im_j[K(O)]^2$$

comme on peut le vérifier sur la définition (V,1,5), en intervertissant l'ordre des intégrations en h et en x :

$$\int C_{ij}(h)\,dh = \frac{1}{2}\iint [f_i(x)f_j(x+h) + f_i(x+h)f_j(x)]\,dx\,dh$$
$$= \frac{1}{2}\int [Q_jf_i(x) + Q_if_j(x)]\,dx = Q_iQ_j$$

Ainsi, *une corrélation positive à courte distance est obligatoirement compensée par une corrélation négative à plus grande distance.*

3. — Relation entre une variable et son champ géométrique.

Un cas particulier remarquable de corégionalisation s'obtient en associent une variable $f(x)$ et la variable géométrique $k(x)$ affectée à son champ V. En écrivant $C(h)$, au lieu de $C_{ij}(h)$, la condition d'indépendance interne (V,2,4) s'écrit simplement :

$$\text{(V,3,1)} \qquad C(h) = mK(h)$$

$m = \dfrac{Q}{K(0)}$ désignant la valeur moyenne de f dans son champ. Lorsqu'elle est vérifiée, la relation (V,2,6) se met sous la forme :

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma_Q^2}{Q^2} - \frac{\sigma_V^2}{V^2}.$$

La variance relative de l'erreur commise sur l'estimation de la moyenne m s'obtient en faisant la différence des variances relatives d'estimation du métal et du volume. Cela signifie que, dans le produit, $Q = mV$, les quantités m et V peuvent être considérées comme ayant été estimées indépendamment l'une de l'autre. Nous dirons, dans ce cas, qu'il n'y a pas d'interférence entre le problème géométrique (estimation de V) et l'estimation de la moyenne m. Dans la mesure où elle manifeste l'absence d'influence de la position d'un point x à l'intérieur du champ, et notamment à plus ou moins grande distance des frontières de V, cette condition (V,3,1) peut servir de critère pour la validité de la théorie intrinsèque (2e partie).

En raison de l'importance de cette relation, nous allons l'examiner avec quelques détails, et pour cela il nous faut, en premier lieu, introduire deux notions nouvelles.

Les algorithmes $m(h)$ ***et*** $Q(h)$. — Nous avons vu, (1,1,5), que le covariogramme géométrique $K(h)$ donne la mesure du volume $V' = V \cap \tau_h V$ de l'intersection du champ V et de son translaté dans la translation h, ou du volume $V'' = V \cap \tau_{-h} V$ obtenu par la translation opposée $-h$. Désignons par $m(h)$ et $Q(h)$ la valeur moyenne de f dans V' et la quantité de métal correspondante :

$$Q(h) = m(h)K(h) = \int_{V'} f(x)\, dx$$

Ce volume V' a, pour variable géométrique, le produit $k(x)k(x-h)$. En effet, $k(x)$ est égal à 1 si x est dans V et à 0 dans le cas contraire, et de même $k(x-h)$ est égal à 1 ou à 0 selon que $y = x - h$ appartient, ou non, à V, c'est-à-dire selon que $x = y + h$ appartient à $V' = V \cap \tau_h V$. De même, le volume $V'' = V \cap \tau_{-h} V$ a pour variable géométrique $k(x)k(x+h)$. Le facteur $k(x)$ peut d'ailleurs être supprimé, puisque $f(x)$ est nulle quand $k = 0$. Nous définirons donc les algorithmes correspondants par les relations suivantes :

$$\text{(V,3,2)} \quad \begin{cases} Q(h) = m(h)K(h) = \int f(x)k(x-h)\, dx = f * \check{k} \\ Q(-h) = m(-h)K(h) = \int f(x)k(x+h)\, dx = \check{f} * k \end{cases}$$

Le covariogramme rectangle $C(h)$. — Revenons, maintenant, au covariogramme rectangle $C(h)$ relatif à $f(x)$ et à sa variable géométrique $k(x)$. De la définition (V,1,5) nous tirons immédiatement :

$$C(h) = \frac{1}{2}[f * \check{k} + \check{f} * k]$$

Nous reportant aux algorithmes (V,3,2) nous obtenons :

$$\text{(V,3,3)} \qquad C(h) = \frac{1}{2}[Q(h) + Q(-h)]$$

Ainsi $C(h)$ est égale à la moyenne arithmétique des quantités de métal contenues dans les intersections du champ V avec ses translatés par $+h$ et $-h$. La conditions d'indépendance interne (V,3,1) prend alors la forme remarquable suivante :

$$\text{(V,3,4)} \qquad \frac{1}{2}[m(h) + m(-h)] = m$$

Il y a *indépendance interne entre une variable et son champ si la moyenne des valeurs prises par la variable dans les intersections du champ* V *avec ses translatés par* h *et* $-h$ *reste constante et égale à la moyenne générale* m. Une telle condition traduit l'absence d'une dérive systématique des valeurs prises par la variable, à l'exception toutefois d'une dérive linéaire qui pourrait rester compatible avec (V,3,4). Dans la deuxième partie, et d'un point de vue stochastique, nous verrons que la théorie intrinsèque admet soit la constance des valeurs probables, soit éventuellement une dérive linéaire. Seules, donc, pourront relever de cette théorie les variables vérifiant (V,3,4), c'est-à-dire indépendantes de leur champ. Pratiquement, on pourra tolérer certains écarts, que l'on interprétera comme des fluctuations statistiques normales, à condition qu'elles ne prennent pas trop d'ampleur.

Dans le cas d'une dérive zonée, où l'on a par exemple un cœur riche et des périphéries de plus en plus pauvres, on voit facilement que l'on a :

$$\begin{cases} C(h) > mK(h) \text{ pour } |h| \text{ petit} \\ C(h) < mK(h) \text{ pour } |h| \text{ grand} \end{cases}$$

On notera, cependant, que dans tous les cas les relations suivantes sont vérifiées :

$$\text{(V,3,5)} \qquad \begin{cases} C(O) = mK(O) = Q \\ \int C(h)\,dh = m \int K(h)\,dh = QV \end{cases}$$

La première résulte de la définition (V,3,3) de $C(h)$, et la deuxième découle directement de (V,2,8). Par comparaison avec (V,2,1), on notera que la relation $C(O) = mK(O)$ exprime que *la covariance (ordinaire) d'une variable* $f(x)$ *et de son champ* $k(x)$ *est toujours nulle.* Seule, la corrélation différée entre $f(x)$ et $k(x + h)$ c'est-à-dire $C(h)$ peut convenir pour représenter l'influence du champ, et de ses frontières, sur l'allure de la régionalisation.

4. — Les corrélations différées.

Les covariogrammes $C_{ij}(h)$ ont l'inconvénient d'être symétrisés, et de ne pas permettre, par conséquent, de distinguer l'influence de $f_i(x)$ sur $f_j(x + h)$ de celle de $f_i(x)$ sur $f_j(x - h)$. Pour mettre en évidence l'avance

ou le retard d'une variable sur l'autre, il est nécessaire de séparer les deux composantes de (V,1,5). Nous poserons :

$$\text{(V,4,1)} \qquad \begin{cases} D_{ij}(h) = \check{f}_i * f_j = \int f_i(x) f_j(x+h)\, dx \\ D_{ji}(h) = f_i * \check{f}_j = \int f_i(x+h) f_j(x)\, dx \end{cases}$$

Naturellement, on a :

$$\text{(V,4,2)} \qquad \begin{cases} D_{ij}(h) = D_{ji}(-h) \\ C_{ij}(h) = \dfrac{1}{2}[D_{ij}(h) + D_{ji}(h)] \end{cases}$$

Pour un vecteur h donné, examinons la covariance, au sens usuel, de $f_i(x)$ et $f_j(x+h)$. On doit, naturellement, se limiter aux points x tels que x et $x+h$ soient tous deux dans le champ V, de manière que ni $f_i(x)$ ni $f_j(x+h)$ ne s'annule identiquement. En réalité, donc, on s'intéresse à la corrélation des deux variables $k(x+h)f_i(x)$ et $k(x)f_j(x+h)$, limitées, respectivement aux intersections du champ V et des translatés par $-h$ et par h. Conformément aux algorithmes (V,3,2) ces variables ont, dans les champs géométriques de mesure $K(h)$ auxquelles on les a restreintes, les valeurs moyennes :

$$\text{(V,4,3)} \qquad \begin{cases} m_i(-h) = \dfrac{1}{K(h)} \check{f}_i * k \\ m_j(h) = \dfrac{1}{K(h)} f_j * \check{k} \end{cases}$$

La covariance $S_{ij}(h)$, au sens usuel, de $f_i(x)$ et $f_j(x+h)$ est définie par :

$$S_{ij}(h) = \frac{1}{K(h)} \int k(h+x)\, f_i(x)\, k(x)\, f_j(x+h)\, dx - m_i(-h)\, m_j(h)$$

On en tire immédiatement :

$$\text{(V,4,4)} \qquad S_{ij}(h) = \frac{D_{ij}(h)}{K(h)} - m_i(-h)\, m_j(h)$$

Ainsi la condition pour qu'il n'existe pas de corrélation différée, qui s'écrit :

$$\text{(V,4,5)} \qquad D_{ij}(h) = m_i(-h) m_j(h) K(h)$$

n'est pas du tout identique à la condition d'indépendance interne. Lorsque (V,4,5) est vérifiée, on a nécessairement, d'après la deuxième relation (V,4,2) :

$$\text{(V,4,6)} \qquad C_{ij}(h) = \left[\frac{m_i(-h) m_j(h) + m_i(h) m_j(-h)}{2}\right] K(h)$$

relation qui ne coïncide pas, en général, avec (V,2,7), à moins que le produit $m_i(-h) m_j(h)$ ne reste constant et égal à $m_i m_j$.

Prenons, par exemple, $f_i = f$ et $f_j = k$, c'est-à-dire une variable et sa variable géométrique associée. Alors $m_j(h) = m_j(-h) = 1$ quel que soit h, et, d'après (V,4,3), le $D_{ij}(h)$ se réduit à :

$$D_{ij}(h) = \overset{\vee}{f} * k = Q(-h) \qquad \text{(V,4,7)}$$

La condition (V,4,5) pour qu'il n'y ait pas de corrélation différée entre une variable et son champ s'écrit donc :

$$Q(h) = m(h)K(h) = Q(-h)$$

c'est-à-dire :

$$m(h) = m(-h) \qquad \text{(V,4,8)}$$

En l'absence de corrélation différée entre une variable et son champ, la variable a une même valeur moyenne dans les intersections symétriques du champ V et de ses translatés par $+h$ et $-h$. Mais cela n'implique pas, en général, que cette valeur moyenne soit indépendante de h. (V,4,8) n'entraîne pas (V,3,4), ni réciproquement. Entre une variable et son champ, l'indépendance interne et l'absence de corrélation différée sont des conditions de nature différente. Si, par exemple, $f(x)$ est une fonction possédant la symétrie sphérique, c'est-à-dire de la forme $f(r)$, (V,4,8) est vérifiée, mais non (V,3,4) : $f(r)$ est sans corrélation différée avec son champ, mais n'en est pas indépendant au sens de l'indépendance interne.

Par contre, une fonction $f(x)$ qui serait définie par :

$$f(x) = (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)k(x) = (ax)k(x)$$

c'est-à-dire varierait linéairement dans son champ V, et serait nulle à l'extérieur, présenterait une forte corrélation différée avec $k(x)$. On aurait, en effet,

$$Q(h) - Q(-h) = \int [f(x+h) - f(x)]k(x)k(x+h)\,dx = (ah)K(h)$$

soit

$$m(h) - m(-h) = (ah) = a_1h_1 + \cdots + a_nh_n$$

Mais, si de plus, le champ V admet un centre de symétrie, c'est-à-dire si $k = \overset{\vee}{k}$, on aurait aussi pour cette même fonction f :

$$f = -\overset{\vee}{f}$$

d'où l'on tirerait :

$$Q(h) + Q(-h) = (f + \overset{\vee}{f}) * k = 0$$

et la fonction f serait indépendante de son champ, au sens de l'indépendance interne.

D'une manière générale, l'absence de corrélation différée entre une variable et son champ manifeste l'absence de dérive orientée, tandis que l'indépendance interne traduit l'absence de dérivée zonée, ou, si l'on veut, le fait que la plus ou moins grande proximité des frontières du champ est sans influence sur l'allure de la régionalisation.

CHAPITRE VI

APPLICATION AU PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE

SOMMAIRE

Ce chapitre donne un exemple d'application de la théorie au problème pratique posé par l'estimation des volumes et des surfaces.

Le paragraphe 1 *montre que le covariogramme géométrique* $K(h)$ *est de la forme* $V - S_\alpha|h|$ *au voisinage de l'origine, donc linéaire,* S_α *étant la variation diamétrale dans la direction* α *du vecteur* h. *D'où possibilité de calculer la variance d'estimation par le principe de correspondance. Dans le cas d'un volume* V *convexe,* $K(h)$ *se déduit d'une manière simple de l'histogramme des traversées parallèles à* h.

Le paragraphe 2 *donne quelques indications pratiques sur le cas particulier à deux dimensions. Les formules établies montrent que la variance est en raison inverse de la puissance* 3/2 *du nombre des points positifs.*

1. — Propriétés des covariogrammes géométriques.

Le problème géométrique, qui se rencontre fréquemment en pratique, est celui de l'estimation de la surface ou du volume du champ géométrique V associé à une variable régionalisée. On dispose, en général, pour faire cette estimation, des mêmes renseignements que pour l'estimation de la variable elle-même. S'il s'agit, par exemple, d'un réseau de prélèvement ponctuels d'origine y et de maille a, on est capable de dire, pour chaque point du réseau $y + pa = (y_1 + p_1 a_1, \ldots, y_n + p_n a_n)$ s'il appartient, ou non, au champ V. Autrement dit, si l'on désigne par $k(x)$ la variable géométrique associée au champ V, on connaît les valeurs numériques (0 ou + 1) de $k(y + pa)$ pour tous les systèmes d'entiers p. La quantité à estimer, qui est la mesure du champ V, n'est par ailleurs pas autre chose que la « quantité de métal » associée à $k(x)$.

$$\text{(VI, 1,1)} \qquad V = \int k(x)\, dx$$

Le problème géométrique se présente donc comme un cas particulier du problème général de l'estimation des variables régionalisées, tel qu'il a été traité au chapitre IV. En particulier, si l'on connaît le covariogramme géométrique $K(h) = k * \check{k}$, on saura calculer la variance d'estimation attachée à un réseau de maille a par la formule générale (IV, 1,12), ou par les procédés reposant sur le principe de correspondance.

Souvent, d'ailleurs, les renseignements ne seront pas simplement ponctuels, mais pourront avoir une dimension (si l'on a mesuré les longueurs traversées, ou épaisseurs, de V parallèlement à une direction) ou deux dimensions (si l'on a mesuré les aires des sections de V à différents niveaux). En pareil cas, la variable que l'on cherche à estimer n'est plus la variable $k_n(x)$ à n dimensions, mais les variables k_{n-1} ou k_{n-2} à $n-1$ ou $n-2$ dimensions qui s'en déduisent par montées d'ordre 1 et 2, et dont les covariogrammes se déduisent de $K(h)$ par les mêmes opérations de montée.

Mais le covariogramme géométrique possède certaines particularités importantes, qui permettent souvent d'abréger le calcul de la variance d'estimation. Nous avons vu, dans le chapitre I, que $K(h)$ est la mesure (volume si $n = 3$) de l'intersection du champ V avec son translaté dans la translation h, d'où, en particulier, la relation :

$$K(O) = V \qquad \text{(VI, 1,2)}$$

Rappelons également la formule (I,1,14).

$$\int K(h)\, dh = V^2 \qquad \text{(VI, 1,3)}$$

On connaît donc (ou du moins on est capable d'estimer) la valeur à l'origine et l'intégrale de $K(h)$. Mais il y a plus. Prenons, en effet, pour h un vecteur δh de module infiniment petit. La mesure $K(\delta h)$ de l'intersection de V et de son translaté dans la translation infiniment petite δh diffère de $K(h)$ d'une quantité infiniment petite

$$K(O) - K(h) = S(\alpha)|\delta h| \qquad \text{(VI, 1,4)}$$

proportionnelle à $|\delta h|$, au second ordre près, qui représente la moitié du volume balayé par le petit vecteur δh lorsqu'il parcourt tous les points de la surface limite de V. Ce coefficient de proportionnalité $S(\alpha)$ s'appelle la *demi-variation diamétrale* dans la direction α (de cosinus directeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$) du vecteur $\delta(h)$. Si l'on considère les sections $S(z)$ des intersections de V par des plans P perpendiculaires à la direction α, et repérés par l'abscisse z de leur intersection avec une droite parallèle à α, la variation diamétrale $[2\ S(\alpha)]$ apparaît comme la limite supérieure de toutes les sommes possibles de la forme

$$|S(z_1) - S(z_2)| + |S(z_2) - S(z_3)| + \cdots + |S(z_n) - S(z_{n-1})|$$

Une telle limite supérieure existe effectivement pour tous les volumes V que l'on peut rencontrer dans la nature. Il n'est pas nécessaire qu'ils soient connexes (d'un seul tenant), et leurs surfaces limites peuvent présenter des arêtes tranchantes, des points anguleux, etc... Dans les cas particulier où le volume V est convexe, la demi-variation diamétrale $S(\alpha)$ représente l'aire du contour apparent dans la direction α.

Dans tous les cas, donc, les deux premiers termes du développement de $K(h)$ sont connus :

$$K(h) = V - S(\alpha)|h| + \cdots \qquad \text{(VI, 1,5)}$$

et l'on voit qu'un covariogramme géométrique *est obligatoirement linéaire au voisinage de l'origine*, le coefficient du terme en $|h|$ étant la variation diamétrale $S(\alpha)$ dans la direction α du vecteur h. Les méthodes exposées au chapitre IV permettent donc aussi d'obtenir la partie principale des variances d'estimation pour les petites mailles, à condition, toutefois, de pouvoir se ramener au cas d'un covariogramme isotrope. Par exemple, si la variation diamétrale $S(\alpha)$ est à peu près constante et égale à S pour toutes les directions α, on aura, pour une maille $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$ dans l'espace à 3 dimensions, la partie principale suivante :

$$\sigma^2(a_1, a_2, a_3) = S\left[\frac{1}{6}\, a_1 a_2 a_3^2 + 0{,}0609\ a_1 a_2^3 + \frac{\pi}{90}\, a_1^4\right] + \cdots$$

qui est du quatrième ordre par rapport à la maille. Dans le cas où a_3 est nul, c'est-à-dire si l'on a mesuré les traversées de V le long de la direction a_3, seuls subsistent les deux derniers termes, et le dernier subsiste seul si l'on a mesuré les sections parallèles au plan $a_1 a_2$. Nous examinerons plus en détail, dans le paragraphe suivant, le cas correspondant à 2 dimensions seulement.

Relation entre histogramme et covariogramme pour les volumes convexes. — Dans le cas particulier où le volume V est convexe, il existe une relation remarquable entre le covariogramme géométrique $K(h)$ et l'histogramme des traversées parallèles à la direction α du vecteur h. Soit, en effet, S_α l'aire du contour apparent de V dans la direction α, en projection sur un plan P_α perpendiculaire à α. Chaque parallèle D à α coupe V en deux points dont la distance est une traversée (parallèle à α). Désignons par $S_\alpha H_\alpha(u)$ l'aire occupée dans le plan P_α par le pied des droites D pour lesquelles cette traversée est supérieure à u. $H_\alpha(u)$ est la fonction de répartition des traversées, et sa dérivée, si elle existe, est égale, au signe près à la densité de fréquence p_α des traversées

$$p_\alpha = -H'_\alpha(u) \qquad \text{(VI,1,6)}$$

Mais $S_\alpha H_\alpha(u)$ représente aussi la projection, sur P_α, de l'intersection de V et de son translaté par le vecteur h de module u et de direction α

En donnant à h, un accroissement δh dans cette même direction, la variation de $K(h)$ est égale au volume balayé par le vecteur δh lorsqu'il décrit cette projection, et l'on a :

$$K(h) - K(h + \delta h) = S_\alpha H_\alpha(u) |\delta h|$$

D'où finalement la relation cherchée entre le covariogramme $K(u)$ et la fonction de répartition $H_\alpha(h_1)$ des traversées parallèles à la direction α du vecteur h :

$$\text{(VI,1,7)} \qquad \frac{\partial K(h)}{\partial \alpha} = \alpha_1 \frac{\partial K}{\partial h_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial K}{\partial h_n} = - S_\alpha H_\alpha(|h|)$$

La dérivée du covariogramme dans la direction α est proportionnelle à la fonction de répartition des traversées parallèles à α. En prenant $|h| = 0$, on retrouve, naturellement, la relation (VI,1,5). S'il existe une fonction de fréquence (VI,1,6), on a de plus, en dérivant une deuxième fois dans la direction α

$$\text{(VI,1,8)} \qquad \frac{\partial^2 K(h)}{\partial \alpha^2} = S_\alpha p_\alpha(|h|)$$

Inversement, si l'on connaît la fonction de fréquence $p_\alpha(u)$ des traversées dans une direction α, on en déduit $K(h)$ pour un vecteur h ayant cette direction, en intégrant (VI,1,8), compte tenu des conditions aux limites (VI,1,5). Prenons, par exemple, la direction ($\alpha = 1,0,0,0..$) parallèle à l'axe des x_1. On aura :

$$\text{(VI,1,9)} \quad K(h_1,0,0,...) = V - h_1 S_1 + S_1 \int_0^{h_1} (h_1 - u) p_1(u)\, du$$

A titre d'exemple, considérons la sphère de l'espace à μ dimensions dont le covariogramme a été écrit en (II,5,2). On a :

$$K'_\mu(r) = - V_{\mu-1}(1 - r^2)^{\frac{\mu-1}{2}} = - S(1 - r^2)^{\frac{\mu-1}{2}}$$

d'où, en dérivant une nouvelle fois, la fonction de fréquence $p(h)$ des traversées de l'hypersphère à μ dimensions :

$$\text{(VI,1,10)} \qquad p(h) = (\mu - 1)(1 - h^2)^{\frac{\mu-3}{2}} h$$

2. — Application à l'estimation des surfaces.

Examinons, dans l'espace à deux dimensions, le problème de l'estimation de l'aire S d'une surface caractérisée par un covariogramme géométrique $K(h)$, à partir d'une maille rectangulaire (a_1, a_2). On peut imaginer

que les points de prélèvements sont les points d'impact d'un réseau de sondages verticaux, destinés à constater la présence ou l'absence d'une certaine formation géologique. Si n sondages ont été positifs, on prend comme estimateur de l'aire l'expression :

$$\text{(VI,2,1)} \qquad S^* = na_1a_2.$$

En ce qui concerne le calcul de la variance associée à cette estimation, deux problèmes bien distincts se posent : le choix d'une formule, et l'estimation des paramètres que l'on doit faire intervenir dans cette formule. Examinons-les successivement :

Choix d'une formule. — Supposons d'abord que la variation diamétrale D_α soit à peu près indépendante de la direction α, et soit $D = D_\alpha$ cette valeur à peu près constante. Le terme linéaire du covariogramme est isotrope

$$\text{(VI,2,2)} \qquad K(h) = S - D|h| + \cdots$$

de sorte que la partie principale de la variance d'estimation est donnée par la première formule (IV,3,12), soit, avec $a_1 \geqslant a_2$

$$\text{(VI,2,3)} \qquad \sigma^2(a_1, a_2) = D\left[\frac{1}{6}\, a_1a_2^2 + 0{,}060\,9\, a_1^3\right].$$

Il est commode de poser

$$n = \frac{S}{a_1a_2}$$

n représentant le nombre de sondages positifs (ou plus exactement la valeur probable de ce nombre lorsque l'origine du réseau est implantée au hasard dans un rectangle a_1a_2), et de désigner par λ le rapport de maille

$$\lambda = \frac{a_2}{a_1} \leqslant 1$$

On exprime facilement a_1 et a_2 en fonction de n et λ :

$$a_2 = \sqrt{\frac{\lambda S}{n}} \qquad a_1 = \sqrt{\frac{S}{\lambda n}}.$$

Portant dans (VI,2,3), et divisant par S^2, nous obtenons la variance relative, quantité sans dimension, sous la forme

$$\text{(VI,2,4)} \qquad \frac{\sigma^2}{S^2} = \frac{D}{\sqrt{S}}\frac{1}{n^{3/2}}\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{6} + 0{,}060\,9\,\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right].$$

On voit que cette variance est en raison inverse de la puissance $\frac{3}{2}$ du nombre n des sondages positifs.

Mais, en général, la variation diamétrale D_α n'est pas constante. Il arrive souvent, cependant, qu'une transformatipn linéaire permette de se ramener au cas précédent. Il existe souvent, par exemple, deux directions principales α_1 et $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ perpendiculaires, ayant des variations diamétrales D_1 et D_2 telles qu'une affinité d'axe parallèle à α_1 et de module $\frac{D_2}{D_1}$ donne une nouvelle figure de variation diamétrale à peu près constante et égale à D_2. Dans cette affinité, le nombre n n'est pas changé, ni la variance relative. Par contre, S est remplacé par $\frac{SD_2}{D_1}$, et le réseau rectangulaire $(a_1 a_2)$ devient un réseau construit sur un parallélogramme généralement quelconque (sauf si les directions de la maille coïncident avec α_1 et α_2). Dans ce nouveau réseau, on distinguera des lignes de plus grande densité, sur lesquelles l'espacement des prélèvements sera a'_2, et on désignera par a'_1 la distance séparant deux lignes de plus grande densité. On posera alors

$$\lambda' = \frac{a'_2}{a'_1}$$

et la variance relative sera donnée par :

$$\text{(VI,2,5)} \qquad \frac{\sigma^2}{S^2} = \sqrt{\frac{D_1 D_2}{S}} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\sqrt{\lambda'}}{6} + 0{,}060\,9 \frac{1}{\lambda'^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Mais on ne devra pas oublier que ces formules ne représentent que le premier terme d'un développement limité, donc qu'elles ne peuvent s'appliquer, en principe, qu'aux très petites mailles. D'autre part, elles font abstraction d'un Zitterbewegung, qui existe, en général, puisque la portée est finie.

Aux grandes mailles, d'ailleurs, il est préférable d'utiliser directement la formule générale (IV,1,12) qui ne comporte que peu de termes. A la limite, lorsque S peut être contenue toute entière dans un seul rectangle $a_1 a_2$, de sorte qu'il ne puisse exister qu'au plus un prélèvement positif, la formule générale prend la forme « aléatoire » :

$$\sigma^2(a_1 a_2) = a_1 a_2 K(O) - \int K(h)\, dh = a_1 a_2 S - S^2$$

soit, sous forme de variance relative, et avec

$$n = \frac{S}{a_1 a_2} < 1$$

$$\text{(VI,2,6)} \qquad \frac{\sigma^2}{S^2} = \frac{1}{n} - 1.$$

Une simple interpolation graphique entre (VI,2,5) et (VI,2,6) permet, en général, d'obtenir la variance d'estimation pour les mailles intermédiaires.

On peut voir, sur la figure 1, la courbe donnant la variance d'estimation du cercle de diamètre unité, dont le covariogramme est donné en (II,5,4),

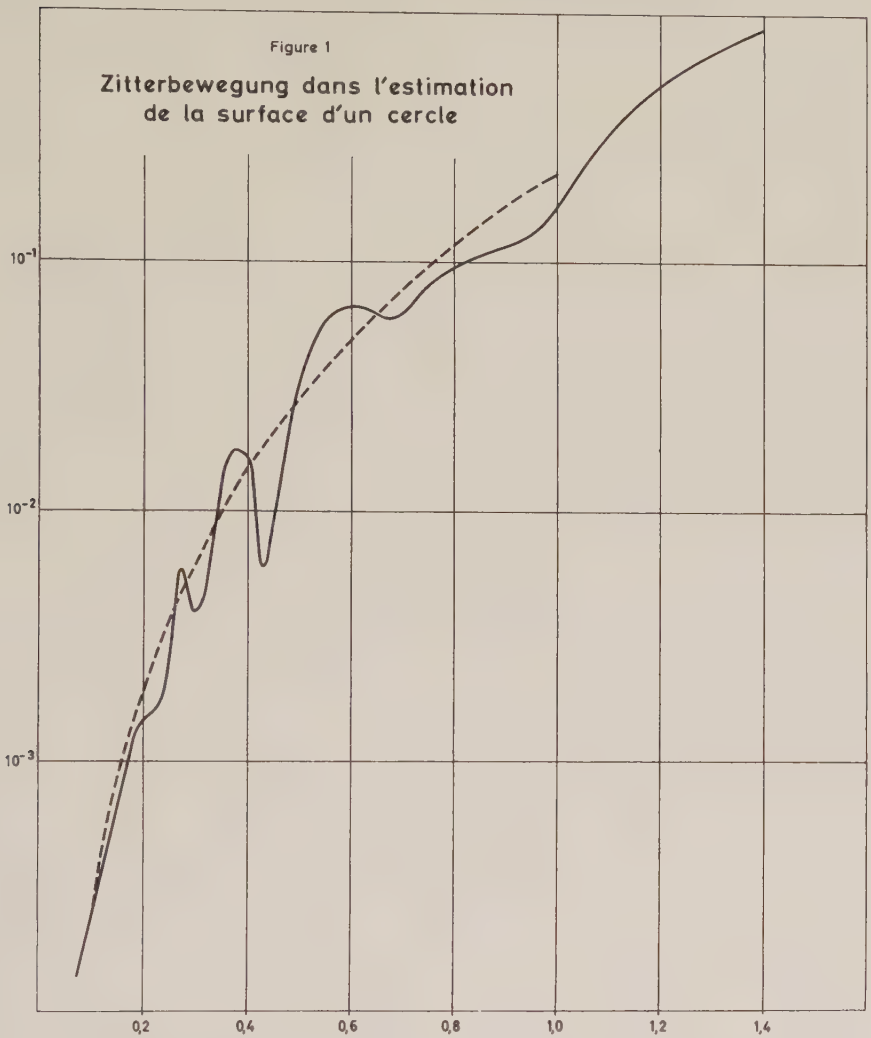

FIG. 1. — Zitterbewegung dans l'estimation de la surface du cercle de diamètre unité à l'aide d'un réseau à maille Carrée. *En abscisse* la maille a. *En ordonnée*, la variance d'estimation correspondante $\sigma^2(a)$. La courbe en trait plein représente la valeur exacte, calculée à partir de la formule exacte (IV,1,12). La courbe en pointillé représente la formule $\sigma^2(a) = 0{,}2\,276\,a^3 + 0{,}004\,77\,a^5$ obtenue en négligeant le Zitterbewegung et en retenant les deux premiers termes du développement limité donné par le principe de correspondance.

pour une maille carrée a. Lorsque a est inférieur à 1, la courbe fluctuante représente la valeur exacte de la variance, calculée selon la formule rigoureuse (IV,1,12), tandis que la courbe régularisée est construite d'après l'équation (VI,2,3), avec $a_1 = a_2 = a$. On voit que le Zitterbewegung

a une ampleur considérable, mais que les fluctuations se font de part et d'autre de la courbe régularisée. Celle-ci, qui peut seule être utilisée en pratique, se raccorde assez bien avec la courbe obtenue, par la formule de type « aléatoire « pour $a > 1$, de sorte que les développements limités du type (VI,2,3) conservent une valeur pratique même pour des mailles déjà grandes.

Choix des paramètres. — On prendra, en pratique, pour n le nombre des sondages positifs réellement disponibles, et on estimera S soit par (VI,2,1), soit en dessinant un contour « plausible », qui, compte tenu des connaissances directes que l'on peut avoir, par ailleurs, sur le phénomène étudié, donnera souvent de meilleurs résultats. Le problème est ensuite d'estimer D_1 et D_2 : le plus simple est, ici encore, d'opérer directement sur le même contour plausible. Si l'on sait d'avance que le contour réel présente certainement des irrégularités notables (dentelures, protubérances, ...) à une échelle inférieure à la maille utilisée, et indécelables pour celle-ci, il y aura lieu, en général, d'ajouter à $K(h)$ un effet de pépite, c'est-à-dire pratiquement, de majorer la variance d'une quantité égale à l'aire totale s attribuée à ces protubérances, multipliée par la maille. soit $s\ a_1 a_2$.

DEUXIÈME PARTIE

LA THÉORIE INTRINSÈQUE

CHAPITRE VII

RAPPEL SUR LES FONCTIONS ALÉATOIRES

SOMMAIRE

Ce chapitre est un simple rappel de la définition et des propriétés des fonctions aléatoires [1], *et, plus particulièrement, des fonctions aléatoires stationnaires d'ordre 2, utilisées dans la deuxième partie. Il peut être passé sans inconvénient par les lecteurs déjà familiarisés avec elles.*

Le paragraphe 1 *définit une fonction aléatoire* $f(x)$ *par l'ensemble des lois de répartitions* $F(f_1 \dots f_k . x_1 \dots x_k)$ *des valeurs prises par* $f(x)$ *en un nombre quelconque de points arbitraires* $(x_1 \dots x_k)$. *Lorsque ces lois sont invariantes pour toute translation des points* $x_1 \dots x_k$, $f(x)$ *est* stationnaire. *Le moment*

$$M_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x_1 \dots x_k),$$

s'il existe, est égal à la valeur probable de $[f(x_1)]^{\alpha_1} \dots [f(x_k)]^{\alpha_k}$.

Le paragraphe 2 *définit les fonctions aléatoires stationnaires d'ordre* 2, *caractérisées par leur fonction de covariance* $K(h)$. $K(h)$ *est de type positif. et son comportement en* $h = 0$ *caractérise la régularité de* $f(x)$.

Le paragraphe 3 *introduit les notions de convergence, de dérivations et d'intégrations en moyenne quadratique. Une fonction aléatoire est continue en moyenne quadratique si* $K(h)$ *est continu en* $h = 0$, *dérivable une fois en moyenne quadratique si* $K(h)$ *est deux fois dérivables en* $h = 0$. *Si* $p(h)$ *est une fonction de pondération de covariogramme transitif* $P = p * \check{p}$, *l'intégrale stochastique*

$$I = \int f(x)p(x)\,dx$$

existe si, et seulement si, l'intégrale représentant sa variance $D^2(I) = \int K(h)P(h)\,dh$ *est elle-même convergente.*

[1] Nous suivons l'exposé classique de Gneden ko *Théorie des Probabilités*, 3e édition, Moscou, 1961; traduction française à paraître chez Dunod. Le lecteur peut se référer aussi à Fortet Blanc-Lapierre *Théorie des fonctions aléatoires*, Paris 1953; M. S. Bartlett *An introduction to stochastic Processes*, Cambridge, 1955, etc.

1. — Définition des fonctions aléatoires.

Une fonction aléatoire $f(x)$ doit être regardée comme une variable aléatoire à une infinité de composantes. En calcul de probabilités, on définit une variable aléatoire $Z = (Z_1 \,..\, Z_k)$ à k composantes à l'aide d'une fonction de répartition :

$$F(z_1,\ z_2 \,..\, z_k) = P_r\{Z_1 < z_1,\ Z_2 < z_2 \,\ldots\, Z_k < z_k\}$$

donnant la probabilité pour que les k variables aléatoires ordinaires $Z_1 \ldots Z_k$ soient simultanément inférieures à des nombres donnés $z_1, z_2 \ldots z_k$. Si k devient infini, on peut considérer la composante Z_i comme représentant, sous forme de variable aléatoire, la valeur $f(x_i)$ prise par une fonction aléatoire $f(x)$ en un point déterminé x_i de l'espace à n dimensions. Ainsi $f(x)$ elle-même apparaît comme une variable aléatoire à une infinité de composantes, ces composantes aléatoires n'étant autres que les valeurs prises par $f(x)$ en chacun des points x de l'espace à n dimensions. Dans le cas particulier d'un espace à une seule dimension, interprété comme un temps t, la fonction aléatoire $f(t)$, qui représente alors l'évolution d'un phénomène dans le temps, est aussi appelée processus stochastique, terminologie que nous n'utiliserons pas ici.

Naturellement, ce passage à un nombre infini (et même non dénombrable) de composantes soulève de difficiles problèmes. Nous nous contenterons, dans cet ouvrage, de la définition suivante, non rigoureuse, mais suffisante en général dans les applications : Une fonction aléatoire $f(x)$ sera considérée comme définie si, pour tout ensemble $x_1, x_2 \ldots x_k$ de points de l'espace à n dimensions, en nombre k quelconque mais fini, on connaît la fonction de répartition des variables aléatoires $f(x_1), f(x_2) \ldots f(x_k)$ représentant les valeurs prises par $f(x)$ en ces points, c'est-à-dire la fonction $F(f_1, f_2, \ldots, f_k ; x_1, x_2 \,..\, x_k)$ définie par :

(VII,1,1)
$$F(f_1,\ f_2 \ldots f_k ;\ x_1,\ x_2 \ldots x_k) = P_r\{f(x_1) < f_1,\ f(x_2) < f_2 \ldots f(x_k) < f_k\}$$

Ces fonctions de répartition F dépendent, naturellement, des points $x_1, x_2 \ldots x_k$. Elles doivent, cependant, vérifier deux conditions évidentes :

Condition de symétrie. — L'ordre dans lequel on a pris les points $x_1 \ldots x_k$ et les valeurs correspondantes $f_1 \ldots f_k$ ne joue aucun rôle. Pour toute permutation $i_1, i_2 \ldots i_k$ des indices $1,2 \ldots k$, on doit donc avoir :

$$F(f_{i_1},\ f_{i_2} \ldots f_{i_k} ;\ x_{i_1},\ x_{i_2} \ldots x_{i_k}) = F(f_1,\ f_2 \ldots f_k ;\ x_1,\ x_2 \ldots x_k)$$

Condition de cohérence. — Si, dans (VII,1,1), on prend $f_k = \infty$, l'inégalité $f(x_k) < f_k$ devient superflue, de sorte que l'on doit obtenir la fonc-

tion de répartition des $k-1$ variables aléatoires $f(x_1), f(x_2) \dots f(x_{k-1})$. Les lois F doivent donc vérifier la condition suivante :

$$F(f_1, f_2 \dots f_{k-1}, \infty ; x_1, x_2 \dots x_{k-1}, x_k) = F(f_1, f_2, \dots f_{k-1}, x_1, x_2 \dots x_{k-1})$$

Réalisation d'une fonction aléatoire. — On appelle réalisation particulière d'une fonction aléatoire $f(x)$ l'ensemble des valeurs numériques $f(x_i)$ obtenues, pour tous les points x_i de l'espace, par un tirage au sort particulier effectué selon les lois F. Il y a le même rapport entre une fonction aléatoire et une de ses réalisations qu'entre une variable aléatoire Z et une valeur numérique particulière z obtenue par un tirage au sort selon la loi de répartition de Z. Une réalisation de $f(x)$ peut être considérée comme une variable régionalisée. Inversement, une régionalisation donnée peut être interprétée comme une réalisation particulière d'une certaine fonction aléatoire $f(x)$, mais une telle interprétation n'aura de signification réelle que si l'inférence statistique est possible, c'est-à-dire s'il est possible de déduire des valeurs numériques $f(x_i)$ de la variable régionalisée une estimation des lois F de la fonction aléatoire $f(x)$. Comme une loi F à k composantes $f_1 \dots f_k$ dépend, en général, de plus de k paramètres, l'inférence statistique ne sera le plus souvent possible, en pratique, que dans le cas dit « stationnaire ».

Fonction aléatoire stationnaire. — Un cas particulier très important est celui où toutes les lois F sont invariantes pour toute translation d'ensemble effectuée sur les points $x_1 \dots x_k$. Lorsque, pour tout ensemble de points $x_1 \dots x_k$ et tout vecteur h, on a :

$$\text{(VII,1,2)} \quad F(f_1 \dots f_k ; x_1 + h, \dots, x_k + h) = F(f_1 \dots f_k ; x_1 \dots x_k)$$

on dit que la fonction aléatoire $f(x)$ est stationnaire. Lorsqu'il en est ainsi, les lois F ne dépendent que de la géométrie relative des points $x_1 \dots x_k$ et non de la position de leur centre de gravité. Le caractère stationnaire implique l'homogénéité de $f(x)$ dans l'espace, et signifie, si l'on veut, que le phénomène représenté par $f(x)$ se répète indéfiniment lui-même dans tout l'espace à n dimensions.

Les moments des lois F. — Le moment d'ordre $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k)$ de la loi de répartition F définie en (VII,1,1) est égale à la valeur probable du produit $[f(x_1)]^{\alpha_1}[f(x_2)]^{\alpha_2} \dots [f(x_k)]^{\alpha_k}$. C'est une fonction des points $x_1 \dots x_k$ que nous noterons $M_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x_1, \dots x_k)$:

$$\text{(VII,1,3)} \quad M_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x_1, \dots x_k) = E\{[f(x_1)]^{\alpha_1} \dots [f(x_k)]^{\alpha_k}\}$$
$$= \int f_1^{\alpha_1} \dots f_k^{\alpha_k} \, dF(f_1 \dots f_k ; x_1 \dots x_k)$$

Le moment d'ordre 1 est *la valeur probable de* $f(x)$ *au point* x. Nous le noterons souvent $m(x)$:

$$\text{(VII,1,4)} \qquad m(x) = M_1(x) = E[f(x)] = \int f \, dF(f, x)$$

Au lieu du moment rectangulaire $M_{11}(x_1, x_2)$, on introduit souvent la fonction $K(x_1, x_2)$ définie par :

$$\text{(VII,1,5)} \quad K(x_1, x_2) = M_{11}(x_1, x_2) - m(x_1)m(x_2) = E\{[f(x_1) - m(x_1)][f(x_2) - m(x_2)]\}.$$

La fonction $K(x_1, x_2)$ est *la covariance* des variables aléatoires $f(x_1)$ et $f(x_2)$. Elle dépend, en général, à la fois de x_1 et de x_2. Lorsque les deux points x_1 et x_2 coïncident, soit $x_1 = x_2 = x$, la fonction $K(x, x)$ du point x représente *la variance* de la variable aléatoire $f(x)$:

$$\text{(VII,1,6)} \quad K(x,x) = D^2[f(x)]$$

Naturellement, ces divers moments n'existent pas toujours. On peut très bien, en pratique, avoir affaire à des fonctions aléatoires pour lesquelles les lois F n'admettent pas de moments d'ordre 2, ni même de moment d'ordre 1. Lorsque la variance $K(x,x)$ existe en tout point x, la covariance $K(x_1, x_2)$ existe aussi pour tous les points x_1 et x_2 : on dit alors que la fonction aléatoire $f(x)$ est à *variance finie.*

2. — Fonctions aléatoires stationnaires d'ordre 2.

Si la fonction aléatoire $f(x)$ est stationnaire, c'est-à-dire si toutes les lois F sont invariantes pour les translations des points $x_1 \ldots x_k$, les différents moments, s'ils existent, possèdent évidemment la même propriété. En particulier, on a, pour tout vecteur h

$$\begin{cases} m(x + h) = m(x) \\ K(x_1 + h, x_2 + h) = K(x_1, x_2) \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que la valeur probable $m(x)$ de $f(x)$ est indépendante du point x, donc est une constante m. De même, la covariance $K(x_1, x_2)$ ne dépend que du vecteur $x_2 - x_1$ et peut être mise sous la forme d'une fonction $K(x_2 - x_1)$ de ce seul argument. On a, en résumé :

$$\text{(VII,2,1)} \quad \begin{cases} m(x) = m \\ K(x_1, x_2) = K(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Dans tout ce chapitre, nous supposerons $m = 0$, puisqu'il est toujours possible de se ramener à ce cas en remplaçant $f(x)$ par $f(x) - m$.

Inversement, supposons que les lois F d'une fonction aléatoire $f(x)$ admettent des moments d'ordre 1 et 2 vérifiant les relations (VII,2,1). On dit, dans ce cas, que $f(x)$ est *stationnaire d'ordre 2*, ou stationnaire au sens large. Il faut bien voir que (VII,2,1) n'entraîne pas, en général, (VII,1,2), de sorte qu'en général une fonction stationnaire d'ordre 2 n'est pas stationnaire au sens strict. Dans un très grand nombre d'applications pratiques, où seuls les moments d'ordre 1 et 2 interviennent effectivement, le caractère stationnaire d'ordre 2 est la seule hypothèse requise. Cette hypothèse sera adoptée dans toute la suite.

La covariance K(h). — La fonction de covariance

$$\text{(VII, 2,2)} \qquad K(h) = E[f(x+h)f(x)]$$

d'une fonction aléatoire stationnaire d'ordre 2 de moyenne nulle ($m = 0$) ne peut pas être absolument quelconque. Elle doit être telle, en effet, que toutes les combinaisons linéaires de la forme

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i)$$

aient une variance positive ou nulle, quels que soient les points x_i et les coefficients λ_i. Cette variance est donnée, d'après (VII,2,2), par l'expression suivante :

$$\sum_{ij} \lambda_i \lambda_j E[f(x_i)f(x_j)] = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j K(x_j - x_i)$$

Si cette expression est positive ou nulle, quels que soient les λ_i, et les x_j, on dit, par définition (Annexe A, paragraphe 9-1) que *la fonction* $K(h)$ *est de type positif.* Inversement, d'ailleurs, si $K(h)$ est une fonction de type positif, on peut construire une fonction aléatoire $f(x)$ stationnaire, admettant des lois F gaussiennes et $K(h)$ comme fonction de covariance. Les propriétés de $K(h)$ en découlent. Elles ne diffèrent pas de celles des covariogrammes transitifs $g(h)$ du chapitre I.

On suppose, en général, que $K(h)$ est une fonction continue. Il suffit d'ailleurs, d'après les propriétés des fonctions de type positif, qu'elle soit continue en $h = 0$ pour qu'elle soit partout continue. La valeur $K(0)$ de $K(h)$ en $h = 0$ n'est autre que la variance de $f(x)$. On a, nécessairement :

$$\text{(VII,2,3)} \qquad \begin{cases} K(h) = K(-h) \\ K(0) > 0 \\ K(h) \leqslant K(0) \end{cases}$$

Enfin, le théorème de Bochner (A,9,1) nous apprend que, pour qu'une fonction continue $K(h)$ soit de type positif, il faut et il suffit qu'elle soit transformée de Fourier d'une mesure positive sommable, dont la somme est alors égale à la variance $K(0)$.

Dans certains cas, on est conduit à utiliser des fonctions $K(h)$ partout continues, sauf en $h = 0$, de telle manière que $K(h)$ admette, lorsque $|h|$ tend vers 0, une limite positive inférieure à la variance $K(0)$. On dit, dans ce cas, que l'on a *un effet de pépite* à l'origine, caractérisé par la constante de pépite :

$$C = K(0) - \lim_{|h| \to 0} K(h)$$

En réalité, on a le plus souvent, non pas une véritable discontinuité à l'origine, mais une zone de transition très petite autour de $h = 0$, dans laquelle la décroissance de $K(h)$ est continue mais extrêmement rapide.

Enfin, il existe une relation étroite entre le comportement de $K(h)$ au voisinage de $h = 0$ et le degré de régularité de la fonction aléatoire ou de ses différentes réalisations possibles. Cette relation sera précisée dans le paragraphe suivant :

3. — Intégration et dérivation stochastique.

Parmi les différents type de convergence stochastiques, nous utiliserons exclusivement la convergence en moyenne quadratique, définie comme suit : *On dit qu'une variable aléatoire* Z_n *converge en moyenne quadratique vers une variable aléatoire* Z *si l'espérance mathématique de* $(Z_n - Z)^2$ *tend vers* 0 *lorsque* n *tend vers l'infini* :

$$\text{(VII, 3,1)} \qquad \lim_{n \to \infty} E[(Z_n - Z)^2] = 0$$

On montre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite Z_n de variances finies converge en moyenne quadratique est que l'espérance mathématique de $(Z_n - Z_m)^2$ tende vers zéro lorsque le plus petit des deux entiers n et m tend vers l'infini :

$$\text{(VII,3,2)} \quad \lim E[(Z_n - Z_m)^2] = 0 \qquad \text{pour} \qquad \text{Min } (m, n) \to \infty$$

Lorsque cette condition de convergence en moyenne quadratique est réalisée, l'espérance mathématique de la limite Z est égale à la limite des espérances mathématiques des Z_n :

$$\text{(VII,3,3)} \qquad E[\lim . Z_n] = \lim_{n \to \infty} E(Z_n)$$

Cela signifie que — sous réserve que (VII,3,1) ou (VII,3,2) soit vérifiée — l'on a le droit d'intervertir le symbole espérance mathématique E et le passage à la limite en moyenne quadratique.

Continuité d'une fonction aléatoire. — Une fonction aléatoire $f(x)$ sera dite *continue en moyenne quadratique* en un point x_0 si l'on a :

$$\text{(VII,3,4)} \qquad \lim_{|x - x_0| \to 0} E\{[f(x) - f(x_0)]^2\} = 0$$

Dans le cas stationnaire d'ordre 2, il suffit que $f(x)$ soit continue en moyenne quadratique en un point x_0 pour qu'elle le soit en tout point x, et la condition (VII,3,4) est, dans ce cas, équivalente à la suivante :

$$\text{(VII,3,5)} \qquad \lim_{|h| \to 0} [K(h)] = K(0)$$

Autrement dit, *pour qu'une fonction aléatoire stationnaire d'ordre* 2 *soit continue en moyenne quadratique, il faut et il suffit que sa covariance* $K(h)$ *soit continue en* $h = 0$. On sait d'ailleurs qu'en ce cas $K(h)$ est obligatoirement continue en tout point h.

Dérivation d'une fonction aléatoire. — Désignons (contrairement aux notations du reste de ce chapitre) par $x_1, x_2 \ldots x_n$ les coordonnées d'un point x. On dira que la fonction aléatoire $f(x) = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ est dérivable, en moyenne quadratique, par rapport à x_1 au point $x = (x_1, x_2 \ldots x_n)$ et a en ce point pour dérivée partielle en x_1 la fonction aléatoire $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ si l'on a :

$$\text{(VII,3,6)} \qquad \lim_{|h_1| \to 0} \mathrm{E}\left\{\left[\frac{f(x_1 + h_1, x_2 \ldots x_n) - f(x_1, x_2 \ldots x_n)}{h_1} - \frac{\partial f(x_1, x_2 \ldots x_n)}{\partial x_1}\right]^2\right\} = 0.$$

On définira de même les dérivées en moyenne quadratique par rapport à $x_2 \ldots x_n$, et la dérivée dans une direction quelconque α de cosinus directeurs $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$:

$$\text{(VII,3,7)} \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Dans le cas d'une fonction aléatoire stationnaire d'ordre 2, de moyenne nulle et de covariance $\mathrm{K}(h)$ il suffit que la condition (VII,2,6) soit vérifiée en un point pour qu'elle le soit en tous les points, c'-est-à-dire pour que $f(x)$ soit partout dérivable en moyenne quadratique. On montre facilement que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que la fonction $\mathrm{K}(h) = \mathrm{K}(h_1, h_2 \ldots h_n)$ soit deux fois dérivable par rapport à h_1 au point $h = 0$. Elle est alors deux fois dérivable par rapport à h_1 en tout point h, et l'on a, de plus,

$$\text{(VII,3,8)} \qquad \mathrm{E}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x + h)\frac{\partial}{\partial x_1} f(x)\right] = -\frac{\partial^2}{\partial h_1^2}\mathrm{K}(h)$$

Ainsi, les fonctions aléatoires *dérivables une fois en moyenne stochastique sont caractérisées par des covariances deux fois dérivables*, c'est-à-dire par des fonctions $\mathrm{K}(h)$ admettant en $h = 0$ un comportement parabolique, et réciproquement. De plus, au signe près, la dérivée seconde de la covariance $\mathrm{K}(h)$ est la covariance de la dérivée première correspondante de la fonction aléatoire.

Intégrales stochastiques. — De la même manière, il est possible de définir l'intégration en moyenne quadratique. Etant donnés une fonction aléatoire $f(x)$, un volume V, partagé en m volumes Δv_i jointifs, et une fonction $\varphi(x)$ quelconque, on considérera des variables aléatoires I_m de la forme

$$\mathrm{I}_m = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\,\varphi(x_i)\,\Delta v_i$$

le point x_i étant pris, quelconque, à l'intérieur du volume Δv_i. Si lorsque l'on fait tendre vers l'infini le nombre m des volumes Δv_i, de manière

que la mesure du plus grand d'entre eux tende vers zéro, les variables aléatoires I_m convergent, en moyenne quadratique, vers une limite I, c'est-à-dire si l'on a :

$$\lim_{\text{Max}\,|\Delta v_i| \to 0} E[(I_m - I)^2] \to 0$$

on posera

$$\text{(VII,3,9)} \qquad I = \int_V f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

et on dira que la variable aléatoire I est *l'intégrale stochastique* de $f(x)\,\varphi(x)$ dans le volume V.

On montre que *la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale stochastique* I *existe, dans le cas où* $f(x)$ *est stationnaire du second ordre, est que l'intégrale ordinaire* :

$$\text{(VII,3,10)} \qquad D^2(I) = \int_V \varphi(x)\,dx \int_V K(y - x)\varphi(y)\,dy$$

existe également, et, dans ce cas, cette dernière intégrale est égale à la variance $D^2(I)$ *de la variable* aléatoire I.

Si l'on introduit la fonction de pondération, ou de prélèvement, $p(x)$ définie par :

$$\begin{cases} p(x) = \varphi(x) & \textit{si } x \text{ appartient à V.} \\ p(x) = 0 & \textit{si } x \text{ n'appartient pas à V.} \end{cases}$$

les expressions (VII,3,9) et (VII,3,10) deviennent

$$\text{(VII,3,11)} \qquad \begin{cases} I = \int f(x)p(x)\,dx \\ D^2(I) = \iint K(y - x)p(x)p(y)\,dx\,dy \end{cases}$$

Si l'on désigne enfin par $P(h)$ le covariogramme transitif associé à $p(x)$:

$$P(h) = p * \check{p} = \int p(x)p(x + h)\,dx$$

la variance $D^2(I)$ peut aussi s'écrire, d'après l'algorithme de Cauchy (1,2,9)

$$\text{(VII,3,12)} \qquad D^2(I) = \int K(h)P(h)\,dh$$

CHAPITRE VIII

LES SCHÉMAS STOCHASTIQUES INTRINSÈQUES

SOMMAIRE

Ce chapitre fondamental expose la théorie dite intrinsèque, qui permet, dans un grand nombre d'applications, de travailler sur des fonctions aléatoires dont la variance serait infinie. Le paragraphe 5, qui concerne un problème particulier, peut cependant être omis en première lecture.

Le paragraphe 1 *définit les schémas intrinsèques comme fonctions aléatoires à accroissements stationnaires, et introduit les moments. L'étude des moments d'ordre 1 met en évidence le phénomène de* dérive linéaire. *Celle des moments d'ordre 2 conduit à la définition de* la fonction intrinsèque $\gamma(h)$, *qui permet le calcul de tous les moments d'ordre 2 et joue un rôle fondamental dans toute la théorie.*

Le paragraphe 2 *examine la relation entre fonction intrinsèque* $\gamma(h)$ *et covariance* $K(h)$, *lorsque celle-ci existe (schémas de type transitif). Mais* $\gamma(h)$ *reste définissable dans un grand nombre de cas où* $K(h)$ *ne l'est pas. Les propriétés de* $K(h)$ *sont ensuite énumérées.* $\gamma(h)$ *doit être* de type positif conditionnel. *Enfin, on examine la signification physique de* $\gamma(h)$, *et différents modèles d'anisotropie.*

Le paragraphe 3 *étudie les variables non ponctuelles et les régularisées* $f * \check{p}$ *par une fonction de pondération* p. *La notion de base est celle de* variance d'extension, *ou variance* $D^2(Y - Z)$ *de la différence de deux variables non ponctuelles, régularisées de* f *par des fonctions de prélèvement* p_1 *et* p_2.

Le paragraphe 4 *définit la notion de variance d'un volume* v *dans un volume* V, *immédiate si* v *est très petit :* $\sigma^2(v, V)$ *est alors la moyenne, pour toutes les positions de* v *dans* V, *de la variance d'extension de* v *et* V. *On généralise au cas de volumes quelconques à l'aide de la relation d'additivité* (VIII, 4,5). *Même définitions pour la covariance de* v *et* v' *dans* V.

Le paragraphe 5 *examine la relation entre schéma intrinsèque et représentation transitive, dans le cas où l'on arrête arbitrairement aux frontières d'un champ* V *une réalisation du schéma intrinsèque. La relation* (VIII, 5,10) *donne, en valeur probable, le* $g(h)$ *en fonction du* $\gamma(h)$ *et du covariogramme géométrique* $K(h)$ *de* V.

1. — Définition et moments.

Nous appellerons schéma à loi de dispersion intrinsèque, ou, plus brièvement, schéma intrinsèque, une fonction aléatoire à accroissements stationnaires. Un grand nombre de régionalisations pourront être interprétées, au moins en première approximation, comme des réalisations de schémas de ce type.

Précisons cette définition. Soient $f_i = f(x_i)$, $f_j = f(x_j)$... les valeurs prises par une variable régionalisée à support ponctuel, considérée comme une réalisation d'une fonction aléatoire $f(x)$. Des lois de probabilités a priori des $f_i f_j$ ..., nous ne dirons rien. Elle pourront n'avoir ni variance finie, ni même de moments d'ordre un. Nous nous intéresserons uniquement aux accroissements

$$\text{(VIII,1,1)} \qquad \varepsilon_{ij} = f_j - f_i = f(x_j) - f(x_i)$$

définis comme la différence des valeurs prises par la variable régionalisée en deux points x_i et x_j, et considérés comme des variables aléatoires. En tant que fonction aléatoire, $f(x)$ est définie — à une constante arbitraire près — par la donnée de toutes les lois de répartition

$$F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl} \ldots; x_i, x_j, x_k, x_l)$$

d'un nombre quelconque d'accroissements ε_{ij}, ε_{kl} entre des points quelconques x_i, x_j, x_k, x_l ... Ces lois dépendent, en général, des coordonnées des points $x_i x_j$ ... La fonction aléatoire $f(x)$ sera dite à accroissements stationnaires, et définira un schéma stochastique à loi de dispersion intrinsèque, si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1) Comme $f(x)$ n'est définie qu'à une constante près, les lois de répartition F ne doivent pas être modifiées si l'on connaît la valeur numérique prise par l'un quelconque des $f_i = f(x_i)$. Naturellement, si l'on connaît deux, ou plusieurs, de ces valeurs, soient f_i et f_j, l'accroissement correspondant $\varepsilon_{ij} = f_j - f_i$ se trouve également connu, et les lois F doivent être remplacées par les lois conditionnelles prises à ε_{ij} fixés.

2) Les accroissements possèdent le caractère stationnaire, autrement dit les lois $F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}, \ldots, x_i, x_j, x_k, x_l)$ sont invariantes pout toute translation d'ensemble effectuée sur les points x_i, x_j ... Pour tout vecteur h, on a donc :

$$\text{(VIII,1,2)} \quad F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}, \ldots, x_i + h, x_j + h, x_k + h, x_l + h) = F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}, \ldots; x_i, x_j, x_k, x_l).$$

Les lois F ne dépendent donc que de la géométrie relative des points $x_i, x_j, \ldots$, et non de la position dans l'espace de leur centre de gravité. On voit qu'une régionalisation considérée comme une réalisation d'un schéma intrinsèque, conserve, quant à ses variations, une allure homogène dans tout

l'espace. Sa variabilité dans l'espace possède bien un caractère intrinsèque, c'est-à-dire indépendant du lieu.

Les moments des accroissements se définissent, sans difficulté, à partir des lois F, comme les valeurs probables, si elles existent, d'expressions de la forme $[\varepsilon_{ij}]^{\alpha_1}[\varepsilon_{kl}]^{\alpha_2}$ ... Dans un schéma intrinsèque, ces moments sont eux-mêmes stationnaires, c'est-à-dire invariants pour toute translation d'ensemble effectuée sur les points $x_i x_j$ ... En dehors des problèmes très spéciaux qui seront abordés au chapitre XIV (fluctuations et estimation des moments d'ordre 2), nous n'aurons besoin, en réalité, que des moments des deux premiers ordres. Nous supposerons toujours que ces moments d'ordre 1 et 2 existent et sont stationnaires. Les lois F elles-mêmes n'interviendront pratiquement jamais, de sorte que la quasi totalité des résultats que nous établirons subsisteront si les accroissements ε_{ij} sont seulement stationnaires au sens large (stationnaires d'ordre 2).

Moments d'ordre 1 et dérive linéaire. — Désignons par D_{ij} la valeur probable a priori de l'accroissement ε_{ij}. D'après la définition même des schémas intrinsèques, elle ne dépend que du vecteur $h_{ij} = x_j - x_i$. Nous noterons :

$$E(\varepsilon_{ij}) = D_{ij} = D(h_{ij}).$$

Mais, de la définition (VIII,1,1) des accroissements, résultent des relations de fermeture, sur lesquelles nous reviendrons, et que l'on peut écrire sous la forme :

$$\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{ik}$$

Si nous prenons les valeurs probables des deux membres de cette relation, nous voyons que la fonction $D(h)$ doit vérifier

$$D(h_{ij}) + D(h_{jk}) = D(h_{ik})$$

pour tous les arguments vectoriels h_{ij}, h_{jk} et h_{ik} tels que :

$$h_{ij} + h_{jk} = h_{ik}.$$

On en déduit que $D(h)$ est une forme linéaire relativement au vecteur $h = (h_1, \ldots h_n)$, autrement dit qu'il existe un vecteur D, de composantes $(D_1, D_2, \ldots D_n)$ tel que $D(h)$ soit égal au produit scalaire des vecteurs D et h :

$$\text{(VIII,1,3)} \qquad D(h) = Dh = D_1h_1 + D_2h_2 + \cdots + D_nh_n$$

Ainsi, en schéma intrinsèque, les moments du premier ordre traduisent l'existence d'une *dérive linéaire* de la variable régionalisée $f(x)$, dérive caractérisée par un gradient constant D. Il est aisé d'éliminer cette dérive en remplaçant $f(x)$ par $f(x) - xD = f(x) - x_1D_1 - x_2D_2 - \cdots - x_nD_n$. L'accroissement ε_{ij} est alors, en effet, remplacé par $\varepsilon_{ij} - Dh_{ij}$, expression dont la valeur probable est nulle. C'est pourquoi dans toute la suite nous supposerons que les moments d'ordre 1 sont identiquement nuls.

$$\text{(VIII,1,4)} \qquad E(\varepsilon_{ij}) = 0$$

Les moments d'ordre 2 et la loi de dispersion intrinsèque $\gamma(h)$. — Le moment d'ordre 2, $E(\varepsilon_{ij}^2)$, qui, d'après (VIII,1,4), ne diffère pas de la variance $D^2(\varepsilon_{ij})$ de l'accroissement ε_{ij}, est une fonction du seul argument vectoriel

$$h_{ij} = x_j - x_i$$

comme il résulte de la définition des schémas intrinsèques. Nous poserons, par définition :

$$\text{(VIII,1,5)} \qquad \gamma(h_{ij}) = \frac{1}{2} D^2(\varepsilon_{ij})$$

La fonction $\gamma(h)$, égale à la moitié de la variance de l'accroissement $f(x+h) - f(x)$, soit

$$\text{(VIII,1,6)} \qquad \gamma(h) = \frac{1}{2} D^2[f(x+h) - f(x)]$$

porte le nom de *fonction de dispersion intrinsèque*, ou, plus brièvement, de fonction intrinsèque. On l'appelle aussi *demi-variogramme*, le variogramme lui-même étant la variance $D^2[f(x+h) - f(x)]$ de l'accroissement d'argument h, variance accessible expérimentalement pour des valeurs discontinues de h. Cette fonction $\gamma(h)$ joue, dans la théorie intrinsèque, le même rôle que la fonction de covariance $K(h)$ dans la théorie des fonctions aléatoires stationnaires.

La donnée de la fonction $\gamma(h)$ permet, à elle seule, de définir tous les moments d'ordre 2. Pour les variances, cela résulte directement de (VIII,1,5). Cherchons la covariance de deux accroissements ε_{ij} et ε_{kl}. Nous poserons, pour abréger les écritures :

$$\text{(VIII,1,7)} \qquad \begin{cases} \gamma_{ij} = \dfrac{1}{2} D^2(\varepsilon_{ij}) \\ E(ij,\ kl) = E(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}) \end{cases}$$

Considérons d'abord deux accroissement ε_{ij} et ε_{jk} ayant un point d'appui commun x_j. Pour les trois indices ij et k, (VIII,1,1) entraîne la relation de fermeture :

$$\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{ik}$$

Prenons la variance des deux membres. Compte tenu de (VIII,1,7), il vient :

$$\text{(VIII,1,8)} \qquad E(ji, jk) = -E(ij, jk) = \gamma_{ij} + \gamma_{jk} - \gamma_{ik}.$$

Soient maintenant, deux accroissements quelconques $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$. La relation de fermeture, pour quatre indices $ijkl$, s'écrit

$$\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{jk} + \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{il}$$

Prenons la variance des deux membres. Il vient :

$$\gamma_{ij} + \gamma_{jk} + \gamma_{kl} + E(ij, jk) + E(jk, kl) + E(ij, kl) = \gamma_{il}$$

Compte tenu de la relation (VIII,1,8) déjà obtenue, on trouve sans difficulté :

(VIII,1,9) $$E(ij,\ kl) = \gamma_{il} + \gamma_{jk} - \gamma_{ik} - \gamma_{jl}$$

Cette relation fondamentale montre que tous les moments d'ordre deux se déduisent de la seule fonction intrinsèque $\gamma(h)$, ainsi que nous l'avons annoncé.

2. — Signification et propriétés de la fonction intrinsèque $\gamma(h)$.

Nous allons dans ce paragraphe nous interroger sur le rapport existant entre la fonction intrinsèque $\gamma(h)$ et la fonction de covariance $K(h)$ d'une fonction aléatoire usuelle, examiner les propriétés de $\gamma(h)$ et enfin préciser sa signification physique.

Rapports entre $\gamma(h)$ ***et*** $K(h)$. — Supposons, tout d'abord, que $f(x)$ soit une fonction aléatoire stationnaire, de variance finie $K(0)$ et de covariance $K(h)$. De la définition (VIII,1,6) de la fonction intrinsèque $\gamma(h)$ on déduit immédiatement, dans ce cas :

(VIII,2,1) $$\gamma(h) = K(0) - K(h)$$

Pour les fonctions aléatoires usuelles, à variance finie, $K(h)$ tend vers zéro lorsque $|h|$ tend vers l'infini. Les corrélations s'évanouissent aux grandes distances. Dans ce cas, $\gamma(h)$ tend vers la variance a priori $K(0)$, et, par conséquent, reste borné. On a :

(VIII,2,2) $$\gamma(\infty) = K(0)$$

Inversement, si $\gamma(h)$ reste borné et tend vers une limite $\gamma(\infty)$ lorsque $|h|$ tend vers l'infini, on peut reconstituer $K(h)$ à partir de $\gamma(h)$ en écrivant

(VIII,2,3) $$K(h) = \gamma(\infty) - \gamma(h)$$

Il est clair que, dans ce cas, la fonction intrinsèque $\gamma(h)$ n'apporte rien de plus que la covariance $K(h)$. Mais il peut arriver que $\gamma(h)$ croisse indéfiniment lorsque $|h|$ tend vers l'infini. En fait, cette circonstance se rencontre fréquemment dans la pratique, où des demi-variogrammes en r^λ $(\lambda > 0)$ ou en $\log r$ sont d'utilisation courante. La relation (VIII,2,2) montre que la fonction aléatoire $f(x)$ a, en pareil cas, une *variance a priori infinie*, de sorte que la covariance $K(h)$ n'est pas définissable. Mais les accroissements ε_{ij} conservent, pour leur part, des variances finies, et l'étude de $f(x)$ en tant que schéma intrinsèque, c'est-à-dire à une constante près, reste possible grâce à la fonction intrinsèque $\gamma(h)$.

Lorsque $\gamma(\infty)$ existe et a une valeur finie, c'est-à-dire lorsque la covariance $K(h)$ est définissable, on dit souvent que *le schéma intrinsèque est*

de type transitif (1). On appelle alors *portée* de la transition la distance au delà de laquelle $K(h)$ s'annule ou devient négligeable, et $\gamma(h)$ égal, ou pratiquement égal, à sa valeur asymptotique $\gamma(\infty)$, qui est la variance a priori $K(0)$. Au delà de la portée, $f(x)$ et $f(x+h)$ sont des variables aléatoires sans corrélation. Très souvent, d'ailleurs, on doit considérer que cette non-corrélation est stricte, et non pas approchée, c'est-à-dire que $K(h) \equiv 0$ et $\gamma(h) \equiv K(0)$ pour $|h| \geqslant b$. La portée b, en réalité, n'est pas un scalaire, mais dépend de la direction α du vecteur h, et, en général, la manière dont la portée $b(\alpha)$ se modifie avec la direction α met en évidence certains traits structuraux majeurs d'une régionalisation. Par exemple, lorsque l'on étudie la distribution des teneurs d'un minéral dans une formation géologique sédimentaire, on observe souvent un variogramme expérimental de type transitif. Cela signifie, en général, que l'aire où s'est effectué le dépôt était fragmentée en micro-bassins de sédimentation à peu près autonomes. L'étude de la portée $b(\alpha)$, en fonction de la direction, permet de dégager la forme et les dimensions moyennes de ces microbassins, leurs directions d'allongement, etc...

Souvent aussi, sans être infinie, la variance a priori $K(0)$ est très grande et à peu près dépourvue de signification pratique. Il en est ainsi, par exemple, lorsque la portée est grande relativement à l'échelle à laquelle on travaille. On ne peut espérer, en effet, mettre en évidence expérimentalement $K(0)$ que si les données disponibles intéressent une zone franchement supérieure à la portée. Si la zone de travail est du même ordre de grandeur, ou plus petite, que la portée elle-même, non seulement $K(0)$ reste inaccessible, mais les caractéristiques locales de la régionalisation sont représentées de manière beaucoup plus efficace par la fonction intrinsèque $\gamma(h)$.

Propriétés de $\gamma(h)$. — De par sa définition même, (VIII,1,6), $\gamma(h)$ est évidemment une fonction paire et non négative

$$\gamma(h) = \gamma(-h) \geqslant 0 \qquad \text{(VIII,2,4)}$$

De plus, en faisant $h = 0$ dans (VIII,1,6), on a toujours

$$\gamma(0) = 0 \qquad \text{(VIII,2,5)}$$

Cette dernière condition n'implique pas, obligatoirement, que $\gamma(h)$ tende vers 0 lorsque $|h| \to 0$. Lorsque l'on a :

$$\lim_{|h| \to 0} \gamma(h) = C > 0$$

on dit qu'il y a *un effet de pépite* à l'origine. La constante positive C s'appelle constante de pépite. Plutôt qu'une véritable discontinuité à l'origine,

(1) On se gardera de confondre (bien qu'il y ait des analogies entre eux) les schémas intrinsèques de type transitif avec les représentations transitives étudiées dans la première partie.

l'effet de pépite correspond, le plus souvent, à l'existence d'une très petite zone de transition entourant le point $h = 0$, et dans laquelle la croissance de $\gamma(h)$ est extrêmement rapide sans être réellement discontinue. Expérimentalement, et pour les applications pratiques, tout se passe comme s'il y avait discontinuité réelle. En dehors de $h = 0$, $\gamma(h)$ doit toujours être supposée continue.

Lorsque $\gamma(\infty)$ existe, la relation (VIII,2,3) nous montre que

$$\gamma(\infty) - \gamma(h)$$

doit posséder toutes les propriétés d'une fonction covariance $K(h)$, c'est-à-dire être de type positif. Mais si $\gamma(h)$ n'a pas de limite finie lorsque

$$|h| \to \infty,$$

les conditions imposées à $\gamma(h)$ sont moins strictes. En effet, on doit exiger seulement que toute combinaison linéaire d'accroissements de la forme :

$$\text{(VIII,2,6)} \qquad H = \sum_k \lambda_k [f(y_k) - f(x_k)]$$

ait une variance positive pour des points x_k, y_k et des coefficients λ_k quelconques. Compte tenu de (VIII,1,9), la variance de l'expression H écrite ci-dessus a pour valeur :

$$\text{(VIII,2,7)} \qquad D^2(H) = \sum_{kl} \lambda_k \lambda_l [\gamma(y_l - x_k) + \gamma(x_l - y_k) - \gamma(x_l - x_k) - \gamma(y_l - y_k)]$$

Cherchons une condition pour que $D^2(H)$ ne soit jamais négative. Prenons, par exemple, comme points y_k les translatés des x_k dans une même translation τ

$$y_k - x_k = \tau$$

La variance (VIII,2,7) prend, dans ce cas, l'expression suivante :

$$\text{(VIII,2,8)} \qquad D^2(H) = \sum_{kl} \lambda_k \lambda_l [\gamma(x_l - x_k + \tau) + \gamma(x_l - x_k - \tau) - 2\gamma(x_l - x_k)].$$

En comparant avec la définition des fonctions de type positif (formule (A,9,1) de l'Annexe A), nous voyons que (VIII,2,8) ne prendra jamais de valeurs négatives si, et seulement si, la fonction

$$\text{(VIII,2,9)} \qquad \gamma(h + \tau) + \gamma(h - \tau) - 2\gamma(h)$$

est de type positif, relativement à h, quel que soit le vecteur τ. Nous montrerons, dans le chapitre x, que cette condition, nécessaire pour que la variance (VIII,2,7) ne soit jamais négative pour des x_k et des y_k quelconques, est également suffisante, et nous l'exprimerons sous une forme

équivalente plus simple. Nous verrons, en particulier que cette condition est vérifiée par un $\gamma(h)$ de la forme r^λ (avec $r = |h|$) :

$$\begin{cases} \gamma(h) = r^\lambda \\ \lambda < 2 \end{cases}$$

pourvu que λ soit inférieur à 2, et par un $\gamma(h)$ de la forme $\log r$. D'une manière générale, d'ailleurs, la croissance de $\gamma(h)$ lorsque $|h| \to \infty$ doit être *moins rapide que celle de* h^2.

Nous exprimerons le fait que la fonction (VIII,2,9) doit être de type positif quel que soit τ en disant que $-\gamma(h)$ doit être de *type positif conditionnel.* On remarquera qu'il en résulte, entre autre, l'inégalité

$$\text{(VIII,2,10)} \qquad \gamma(h + \tau) + \gamma(h - \tau) \leqslant 2[\gamma(h) + \gamma(\tau)]$$

Signification physique de la fonction intrinsèque $\gamma(h)$**.** — Le comportement du $\gamma(h)$ au voisinage de l'origine est, ici encore, en relation étroite avec les propriétés de régularité et de continuité de la régionalisation $f(x)$, considérée comme une variable aléatoire. On peut voir, exactement comme dans le chapitre précédent, qu'une fonction intrinsèque $\gamma(h)$ continue en $h = 0$ caractérise une fonction $f(x)$ continue en moyenne quadratique. De même, un $\gamma(h)$ deux fois dérivable à l'origine, c'est-à-dire y possédant un comportement parabolique, caractérise une fonction dérivable une fois en moyenne quadratique.

D'une manière plus concrète, on peut voir que la fonction intrinsèque donne un contenu précis à la notion, usuelle dans l'industrie minière, mais peu claire par elle-même, de *zone d'influence d'un échantillon.* La croissance plus ou moins rapide du demi-variogramme $\gamma(h)$, lorsque $|h|$ augmente, représente exactement la manière plus ou moins rapide dont se détériore l'influence d'un échantillon donné sur des zones de plus en plus lointaines d'un gisement.

Dans les applications, on cherchera toujours à se ramener au cas d'une fonction intrinsèque *isotrope*, c'est-à-dire de la forme :

$$\begin{cases} \gamma(h) = \gamma(r) \\ r = |h| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2} \end{cases}$$

Mais les *anisotropies*, constatées sur les demi-variogrammes expérimentaux, présenteront un grand intérêt par elles-mêmes, car elles traduiront, en général, des caractéristiques structurales majeures du phénomène étudié. On utilisera, en pratique, certains modèles simples d'anisotropie :

Anisotropie géométrique. — Elle se caractérise par un $\gamma(h)$ de la forme $\gamma(Q)$, où Q est une forme quadratique

$$Q = \Sigma a_i a_j h_i h_j$$

relativement aux composantes du vecteur h. Il suffit d'effectuer une transformation linéaire sur les coordonnées pour se ramener au cas isotrope

$Q = r^2$. En général, les directions principales de Q seront connues directement, car elles correspondront à des directions préférentielles du phénomène lui-même, de sorte que la transformation linéaire se réduira à remplacer $(h_1, h_2, h_3$ par $(\lambda_1 h_1, \lambda_2 h_2, \lambda_3 h_3)$ avec des constantes λ, ou modules d'affinité, convenablement choisies.

Anizotropies zonales. – Il peut arriver que $\gamma(h)$ ne dépende pas réellement des n composantes du vecteur h, mais seulement d'une ou deux d'entre elles. Par exemple, à 3 dimensions, on peut avoir une fonction de la forme $\gamma(h_3)$ ne dépendant que de la composante verticale h_3 de h. Avec une telle fonction, un accroissement $f(x + h) - f(x)$ a une variance nulle si $h = (h_1, h_2, 0)$ est un vecteur horizontal. Autrement dit, la variable régionalisée $f(x)$ reste constante dans un même plan horizontal, et le phénomène a une allure *rubannée*.

De même *un run* pourra se représenter par un $\gamma(h)$ de la forme $\gamma(h_2, h_3)$, indépendant de la composante h_1. La variable $f(x)$ reste alors constante le long des droites parallèles au premier axe de coordonnées. En pratique, naturellement, $f(x)$ ne reste jamais rigoureusement constante dans des plans ou sur des droites parallèles, mais manifeste seulement une tendance à varier beaucoup moins le long de ces plans ou de ces droites préférentielles que dans les autres directions. On est conduit à décomposer le $\gamma(h)$ en deux termes, l'un isotrope et l'autre zonal :

$$\gamma(h) = \gamma_1(r) + \gamma_2(h_3)$$
$$\gamma(h) = \gamma_1(r) + \gamma_2(h_2, h_3)$$

ce qui revient à superposer deux régionalisations indépendantes, l'une isotrope, l'autre représentant un rubannement ou un run parfait. Dans un très grand nombre de problèmes, et notamment dans le calcul des variances d'estimation, ces deux composantes agissent séparément et leurs effets peuvent être ajoutés purement et simplement.

3. — Variables non ponctuelles et variance d'extension.

En vue de définir, en termes de schéma intrinsèque, les variables régionalisées à support non ponctuel, nous considérerons, en premier lieu, deux groupes de points x_i et x_j, au nombre, respectivement, de N_i et N_j, et des coefficients de pondération λ_i et λ_j vérifiant

$$\text{(VIII,3,1)} \qquad \sum_{i \in I} \lambda_i = \sum_{j \in J} \lambda_j = 1$$

La notation commode $i \in I$ (i appartient à I) indique que la sommation doit être faite sur l'ensemble I des indices i affectés aux points x du premier groupe. De même $j \in J$ indique que la sommation s'étend à tous les points x_j du deuxième groupe. Définissons deux nouvelles variables

aléatoires Y et Z égales aux moyennes, pondérées par les λ_i et les λ_j, de $f(x)$ sur chacun des deux groupes de points :

$$\text{(VIII,3,2)} \qquad \begin{cases} Y = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) \\ Z = \sum_{j \in J} \lambda_j f(x_j) \end{cases}$$

Généralisant la notion d'accroissement, nous allons nous intéresser non pas aux variables Y et Z elles-mêmes, mais à leur différence Y — Z. Cette différence s'exprime à l'aide d'une combinaison linéaire d'accroissements $\varepsilon_{ij} = f(x_j) - f(x_i)$. En effet, compte tenu de (VIII,3,1), nous avons, en premier lieu :

$$f(x_i) = f(x_j) + \varepsilon_{ji} = \sum_{j \in J} \lambda_j [f(x_j) + \varepsilon_{ji}] = Z + \sum_{j \in J} \lambda_j \varepsilon_{ji}$$

Multiplions par λ_i les deux membres extrêmes, et sommons en $i \in j$. Il vient :

$$\text{(VIII,3,3)} \qquad Y - Z = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \lambda_i \lambda_j \varepsilon_{ji}$$

Combinaison linéaire d'accroissements ε_{ij} en nombre fini, la variable aléatoire Y — Z est parfaitement définie. De l'hypothèse usuelle (VIII,1,4), on déduit que sa valeur probable est nulle

$$\text{(VIII,3,4)} \qquad E(Y - Z) = 0$$

Pour obtenir sa variance $D^2(Y - Z)$, nous devons élever (VIII,3,3) au carré et passer aux valeurs probables. On obtient ainsi, en utilisant des notations déjà introduites en (VIII,1,7) :

$$D^2(Y - Z) = \sum_{\substack{u,\, i \in I \\ j,\, s \in J}} \lambda_i \lambda_j \lambda_u \lambda_s E[ji,\, su]$$

Tenant compte de (VIII,1,9), et après des simplifications évidentes, il reste :

$$\text{(VIII,3,5)} \qquad D^2(Y - Z) = 2 \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij} - \sum_{j,\, s \in J} \lambda_j \lambda_s \gamma_{js} - \sum_{i,\, u \in I} \lambda_i \lambda_u \gamma_{iu}$$

Cette variance se calcule donc, par des sommations multiples, à l'aide de la fonction intrinsèque $\gamma(h)$. Elles est symétrique relativement à Y et Z, ou aux deux groupes d'indices I et J. On l'appelle *variance d'extension* de Y à Z (ou de Z à Y). Elle représente, en effet, la variance de l'erreur

$Y - Z$ que l'on commet lorsque l'on étend aux x_j la teneur moyenne pondérée des x_i. Dans le cas particulier où l'on a

$$\lambda_i = \frac{1}{N_i} \qquad \lambda_j = \frac{1}{N_j}$$

Y et Z sont simplement les moyennes arithmétiques des valeurs de $f(x)$ pour les deux groupes de points x_i et x_j, au nombre de N_i et N_j respectivement.

Plus généralement, on peut, outre Y et Z, considérer deux autres variables aléatoires T et U définies pour deux autres groupes de points x_k et x_l et des coefficients λ_k et λ_l :

$$\text{(VIII,3,6)} \qquad \begin{cases} T = \sum_{k \in K} \lambda_k f(x_k) \\ U = \sum_{l \in L} \lambda_l f(x_l) \\ \sum_{k \in K} \lambda_k = \sum_{l \in L} \lambda_l = 1 \end{cases}$$

La valeur probable du produit $(Y - Z)(T - U)$ sera appleée covariance des extensions de Z à Y et de U à T, ou plus brièvement, *covariance d'extension*. On trouve, de la manière que ci-dessus :

$$E[(Y - Z)(T - U)] = \sum_{\substack{i \in I \\ k \in K}} \sum_{\substack{j \in J \\ l \in L}} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l E(ij, lk)$$

et l'on en déduit, à l'aide de (VIII,1,9) :

$$\text{(VIII,3,7)} \quad E[(Y - Z)(T - U)] = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} \lambda_j \lambda_k \gamma_{jk} + \sum_{\substack{i \in I \\ l \in L}} \lambda_i \lambda_l \gamma_{il} - \sum_{\substack{j \in J \\ l \in L}} \lambda_j \lambda_l \gamma_{jl} - \sum_{\substack{i \in I \\ k \in K}} \lambda_i \lambda_k \gamma_{ik}.$$

Le passage aux intégrales stochastiques s'effectue sans difficulté. Supposons, par exemple donnés un volume V et une fonction de pondération continue $p(x)$ vérifiant

$$\text{(VIII,3,8)} \qquad \int_V p(x)\, dx = 1$$

Il n'est pas sûr que l'intégrale stochastique :

$$Z = \int_V p(x) f(x)\, dx$$

soit définie, puisque nous ne savons pas calculer sa variance. Par contre, l'accroissement

$$\text{(VIII,3,9)} \qquad Y - Z = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) - \int_V f(x)\, p(x)\, dx$$

est parfaitement défini, en tant qu'intégrale stochastique (voir paragraphe 3, ch. VII) car sa variance s'obtient en effectuant un passage à la limite dans (VIII,3,5) qui donne le résultat :

$$\text{(VIII,3,10)} \qquad \left\{ \begin{aligned} D^2(Y - Z) = {} & 2 \sum_{i \in I} \int_V \lambda_i p(x) \gamma(x - x_i)\, dx \\ & - \int_V \int_V p(x)\, p(x')\, \gamma(x - x')\, dx\, dx' \\ & - \sum_{\substack{i \in I \\ u \in I}} \lambda_i \lambda_u\, \gamma(x_i - x_u). \end{aligned} \right.$$

Par exemple, prenons $p(x) = \frac{1}{V}\, k(x)$, $k(x)$ étant la variable géométrique associée à V. La variable Z est la moyenne (stochastique) de $f(x)$ dans V, et nous l'appellerons souvent, pour abréger, teneur du volume V. De même, prenons tous les λ_i égaux à $\frac{1}{N}$, N étant le nombre des points x_i. Y est alors la moyenne arithmétique des N valeurs $f(x_i)$, et, pour abréger, nous dirons que Y est la teneur moyenne de ces N points. On a, dans ce cas :

$$\text{(VIII,3,11)} \qquad Y - Z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) - \frac{1}{V} \int_V f(x)\, dx.$$

Et la variance d'extension de la teneur moyenne des N points à la teneur du volume V est donnée par l'expression :

$$\text{(VIII,3,12)} \qquad \begin{aligned} D^2(Y - Z) = {} & \frac{2}{NV} \sum_{i=1}^{N} \int_V \gamma(x - x_i)\, dx - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x')\, dx\, dx' \\ & - \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \gamma(x_i - x_j). \end{aligned}$$

De la même manière, la variable Y peut elle aussi être une moyenne stochastique. Prenons, par exemple, les teneurs moyennes de deux volumes V et V'

$$\left\{ \begin{aligned} Y &= \frac{1}{V} \int_V f(x)\, dx \\ Z &= \frac{1}{V'} \int_{V'} f(x)\, dx \end{aligned} \right.$$

La variance d'extension du volume V au volume V′ est égale à :

(VIII,3,13)

$$D^2(V - Z) = \frac{2}{VV'} \int_V \int_{V'} \gamma(x - x')\, dx\, dx' - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x_1 - x_2)\, dx_1\, dx_2 - \frac{1}{V'^2} \int_{V'} \int_{V'} \gamma(x'_1 - x'_2)\, dx'_1\, dx'_2$$

De la même manière, la formule (VIII,3,7) donnant une covariance d'estimation se généralise d'elle-même au cas où une ou plusieurs des moyennes pondérées qui y figurent deviennent des intégrales stochastiques. Il n'est pas utile d'écrire explicitement ici toutes les formules correspondantes, qui s'obtiennent sans aucune difficulté en remplaçant les sommations discontinues par des intégrales. Donnons, cependant, le résultat dans le cas où les quatre variables sont des intégrales stochastiques :

Soient p_1, p_2, p_3 et p_4 quatre fonctions de pondération de somme unité

$$\int p_1\, dx = \int p_2\, dx = \int p_3\, dx = \int p_4\, dx = 1$$

Les quatre variables aléatoires :

$$\begin{cases} Y = \int p_1(x) f(x)\, dx \\ Z = \int p_2(x) f(x)\, dx \\ T = \int p_3(x) f(x)\, dx \\ U = \int p_4(x) f(x)\, dx \end{cases}$$

ont comme covariance d'extension :

(VIII,3,14) $E[(Y - Z)(T - U)]$

$$= - \iint [p_1(x) - p_2(x)]\, [p_3(y) - p_4(y)]\, \gamma(x - y)\, dx\, dy$$

Cette formule unique (VIII,3,14) renferme les précédentes comme cas particuliers.

Régularisation d'un schéma intrinsèque. — Les variances d'extension que nous venons de définir, constituent l'exacte généralisation du variogramme $2\,\gamma(h)$ au cas de variables non ponctuelles. Le variogramme $2\,\gamma(h)$ lui-même, par définition, est égal à $D^2[f(x + h) - f(x)]$, c'est-à-dire précisément à la variance d'extension des deux variables ponctuelles $f(x)$ et $f(x + h)$. Il est commode de représenter à l'aide de produits de convolution, la régularisation d'un schéma intrinsèque $f(x)$ par une fonction de prélèvement ou de pondération $p(x)$. Nous supposerons toujours

$$\int p(x)\, dx = 1$$

et nous introduirons le covariogramme transitif $P(h)$ associé à $p(x)$:

$$P(h) = p * \check{p} = \int p(x)p(x+h)\,dx.$$

Le prélèvement p effectué au point x donne la fonction aléatoire régularisée $f_p(x)$, qui est l'intégrale stochastique :

!(VIII,3,15) $$f_p(x) = f * \check{p} = \int f(x+y)\ p(y)\,dy.$$

Tout comme $f(x)$ elle-même, la régularisée f_p n'est, en général, accessible que par l'intermédiaire de ses accroissements $f_p(x+h) - f_p(x)$, c'est-à-dire en tant que schéma intrinsèque. La variance de cet accroissement se déduit des formules données plus haut. C'est, en effet, la variance d'extension relative aux deux variables

$$\begin{cases} Y = \int f(y)\ p(y-x)\,dy \\ Z = \int f(y)\ p(y-x-h)\,dy \end{cases}$$

dont l'expression s'obtient immédiatement :

$$D^2(Y-Z) = 2\iint \gamma(x-x')\ p(x)\ p(x'-h)\,dx\,dx' - 2\iint \gamma(x-x')\ p(x)\ p(x')\,dx\,dx'.$$

Il suffit de poser $x = u + x'$ et d'effectuer en premier l'intégration relativement à x' pour faire apparaître l'expression du covariogramme transitif $P = p * \check{p}$:

$$D^2(Y-Z) = 2\int \gamma(u)\ P(u+h)\,du - 2\int \gamma(u)\ P(u)\,du$$

Mais la fonction intrinsèque $\gamma_P(h)$ associée à la régularisée $f_p = f * \check{p}$ considérée comme définissant un schéma intrinsèque, est égale à la moitié de la variance $D^2(X-Z)$ ainsi calculée : Nous avons donc la règle suivante :

(VIII,3,16) $$\gamma_P(h) = \gamma * P - \int \gamma(u)\ P(u)\,du$$

A une constante près, la fonction intrinsèque de la régularisée $f * \check{p}$ s'obtient en régularisant la fonction intrinsèque γ par le covariogramme transitif P associé à la fonction de pondération ou de prélèvement. La constante, égale à la valeur moyenne de $\gamma(x-x')$ pondérée par $p(x)p(x')$, est telle que l'on ait $\gamma_P(0) = 0$.

Dans le cas particulier où l'on a

$$p(x) = \frac{1}{\varrho}\,k(x).$$

$k(x)$ étant la variable géométrique associée à un volume v, la régularisée $f * \check{p}$ représente la teneur de l'échantillon v prélevé au point x. A une constante près, représentant la valeur moyenne de $\gamma(h)$ dans v, sa fonction intrinsèque $\gamma_P(h)$ s'obtient en prenant la valeur moyenne de $\gamma(x - x')$ lorsque les deux extrémités x et x' de l'argument vectoriel $x - x'$ décrivent, séparément, deux volumes v égaux et translatés l'un de l'autre dans la translation h.

Naturellement, la régularisée $f * \check{p}$ doit être effectivement plus régulière que f elle-même, pourvu que la fonction de pondération soit elle-même suffisamment régulière. Par exemple, si p admet des dérivées premières, P admet des dérivées secondes, et, par suite, il en est de même de $\gamma_P(h)$, d'après (VIII,3,16), de sorte que la régularisée $f * \check{p}$ est dérivable en moyenne quadratique, même si f ne l'était pas. Ce mécanisme de régularisation sera étudié plus en détail, dans le chapitre XII, à propos de la montée intrinsèque sous puissance constante.

4. — Variance de v dans V.

Si v et V sont deux volumes, le premier étant contenu dans le second, et Y et Z leurs moyennes stochastique, la variance d'extension de Y et Z, appelée aussi variance d'extension de v dans V, est parfaitement définie par la formule (VIII,3,13). Elle dépend, en particulier, de la position occupée par v à l'intérieur de V, et ne représente donc pas la variance dans le champ géométrique V des variables non ponctuelles de support v. On se rend bien compte que la variance de v dans V doit être une sorte de moyenne de toutes les variances d'extension de v dans V pour toutes les implantations, géométriquement possibles, de v dans le champ V. Mais il apparaît que cette notion de variance de v dans V — qui semble, de prime abord, toute naturelle et expérimentalement évidente — n'est définissable, de manière univoque, que dans le cas d'une variable à support ponctuel.

Examinons donc, en premier lieu, le cas d'un support ponctuel. Soit m la moyenne stochastique de $f(x)$ dans V

$$m = \frac{1}{V} \int_V f(x)\, dx$$

On peut définir la variance de $f(x)$ dans V comme la valeur probable de l'intégrale stochastique

$$S^2 = \frac{1}{V} \int_V [f(x) - m]^2\, dx \qquad \text{(VIII,4,1)}$$

En notation d'accroissement $\varepsilon_{ij} = f(x_j) - f(x_i)$, on a

$$f(x_i) - m = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ji}\, dx_j$$

et par suite S^2 est donnée par l'intégrale multiple d'ordre $3n$

$$S^2 = \frac{1}{V^3}\int_V\int_V\int_V \varepsilon_{ji}\varepsilon_{ki}\, dx_j\, dx_i\, dx_k.$$

La variance de $f(x)$ dans V, que nous noterons $\sigma^2(0|V)$ s'obtient en prenant la valeur probable de cette intégrale. Compte tenu de (VIII,1,8), il vient simplement :

$$\text{(VIII,4,2)} \quad \sigma^2(0|V) = E(S^2) = \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x - x')\, dx\, dx'.$$

Ainsi la variance de la variable ponctuelle est égale à la valeur moyenne dans V de la fonction intrinsèque $\gamma(h)$. Elle peut se calculer à l'aide de l'algorithme de Cauchy (I,2,9).

On peut aussi définir cette même variance $\sigma^2(0|V)$ comme *la valeur moyenne de la variance d'extension* $D^2[f(x) - m]$ lorsque le point x est tiré au sort dans V selon une loi de probabilité uniforme. On a, en effet, d'après (VIII,3,12)

$$D^2[f(x) - m] = \frac{2}{V}\int_V \gamma(x - y)\, dy - \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(y - y')\, dy\, dy'.$$

En intégrant relativement au point x, on obtient sans peine :

$$\frac{1}{V}\int_V D^2[f(x) - m]\, dx = \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x - x')\, dx\, dx' = \sigma^2(0|V).$$

de sorte que les deux définitions de $\sigma^2(0|V)$ sont bien équivalentes.

Passons, maintenant, à la variable Y à support non ponctuel v, ou moyenne stochastique de $f(x)$ dans v :

$$Y = \frac{1}{v}\int_v f(x)\, dx.$$

La définition (VIII,4,1) n'a plus beaucoup de sens, parce que, dans une intégration en x étendue au champ V de l'expression $[Y - m]^2$, les points x voisins de la frontière de V introduisent, par l'intermédiaire de Y, des valeurs de la variable $f(x)$ extérieures au champ V. Du fait que le support v n'est plus ponctuel, il se produit aux frontières un effet de bavure, et, entre autre, la moyenne stochastique de $Y(x)$ dans V n'a plus de raison de coïncider avec m. Pour un volume v de l'ordre de la moitié ou des trois quarts de V, cette circonstance enlève à peu près toute signification à la notion de variance de v dans V. Il y a cependant deux cas où une définition, rigoureuse ou approchée, est possible.

Le premier cas est celui où le volume V est constitué par la juxtaposition de N volumes v_i, tous égaux à un même volume v et translatés les uns des autres (ce seront, par exemple, des parallélépipèdes). Si l'on désigne par Z_i la moyenne stochastique de $f(x)$ dans le volume v_i, et par m celle de $f(x)$ dans V, on a, cette fois en toute rigueur :

$$\frac{1}{N}\sum_i Z_i = m.$$

La population finie des NZ_i a une variance

$$S^2(\varphi|V) = \frac{1}{N}\sum_i (Z_i - m)^2$$

qui est, en réalité, une expression stochastique. C'est la valeur probable de cette expression qui sera appelée, par définition, variance de φ_i dans V.

$$\text{(VIII,4,3)} \qquad \sigma^2(\varphi_i|V) = E[S^2(\varphi|V)] = \frac{1}{N}\sum_i D^2(Z_i - m).$$

Mais la variance d'extension d'un φ_i particulier dans V se calcule par la formule générale (VIII,3,13). Comme les volumes φ_i constituent une partition de V, on a, pour toute fonction $\Phi(x)$:

$$\frac{1}{N\varphi}\sum_i \int_{v_i} \Phi(x)\,dx = \frac{1}{V}\int_V \Phi(x)\,dx.$$

Compte tenu de cet algorithme et de (VIII,3,13), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_i D^2(Z_i - m) &= \frac{2}{V}\int_V dx \frac{1}{N\varphi}\sum_i \int_{v_i} \gamma(x - x_i)\,dx_i \\ &\quad - \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x - x')\,dx\,dx' - \frac{1}{N}\sum_i \frac{1}{\varphi^2}\int_v\int_v \gamma(x - x')\,dx\,dx' \\ &= \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x - x')\,dx\,dx' - \frac{1}{\varphi^2}\int_v\int_v \gamma(x - x')\,dx\,dx'.\end{aligned}$$

Ainsi, dans ce premier cas particulier, où V est constitué par un empilement de briques toutes égales à φ, on obtient la variance de φ dans V sous la forme synthétique suivante :

$$\text{(VIII,4,4)} \qquad \sigma^2(\varphi|V) = \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x - x')\,dx\,dx' - \frac{1}{\varphi^2}\int_v\int_v \gamma(x - x')\,dx\,dx'.$$

Le deuxième cas particulier est celui où φ est très petit, dans toutes ses dimensions, vis-à-vis de V. En ce cas, les interférences qui se produisent aux frontières n'ont qu'un effet négligeable. Cette circonstance justifie, d'ailleurs, la notion apparemment intuitive, mais d'origine purement expérimentale, de variance d'un petit échantillon φ dans un grand champ géométrique V. La moyenne stochastique des φ dans V ne diffère pratiquement pas de m. Dans l'expression de la variance d'extension de V et de la moyenne stochastique Z_i d'un volume φ_i égal à φ implanté au point x_i : on peut poser, en première approximation :

$$\frac{2}{\varphi V}\int_V\int_{v_i} \gamma(x - x')\,dx\,dx' \# \frac{2}{V}\int_V \gamma(x - x_i)\,dx.$$

On définit ensuite la variance de φ dans V comme la valeur moyenne

de la variance d'extension de φ_i dans V lorsque x_i occupe toutes les positions possibles dans V. On retombe alors sur la même formule (VIII,4,4).

Ainsi, dans les deux cas où elle est définissable, la variance $\sigma^2(\varphi|V)$ est donnée par le formule (VIII,4,4). Elle vérifie la *relation d'additivité*

$$\sigma^2(\varphi|V') = \sigma^2(\varphi|V) + \sigma^2(V|V') \qquad \text{(VIII,4,5)}$$

qui exprime que la variance de φ dans V' est égale à la somme des variances de φ dans V et de V dans V'. Cette relation (VIII,4,5) n'a de sens que si φ et V sont intérieurs à V et V' respectivement, et si ces volumes vérifient l'une ou l'autre des deux hypothèses requises : partition stricte, ou champ très grand vis-à-vis du support. Mais elle peut être utilisée aussi pour définir la variance lorsque ces hypothèses ne sont pas remplies. Prenons, en effet, un volume V' très grand, de manière que $\sigma^2(\varphi|V')$ et $\sigma^2(V|V')$ soient tous deux définissables. Nous posons alors, *par définition*

$$\sigma^2(\varphi|V) = \sigma^2(\varphi|V') - \sigma^2(V|V') \qquad \text{(VIII,4,6)}$$

On vérifie immédiatement que cette définition (VIII,4,6) conduit toujours à la même formule (VIII,4,4), qui prend ainsi valeur générale. En particulier, le choix du grand champ V', qui a servi d'intermédiaire, n'influe pas sur le résultat obtenu.

Naturellement, on ne peut espérer que la variance $\sigma^2(\varphi|V)$ reste strictement positive que si les volumes φ et V sont géométriquement compatibles. On a, d'ailleurs

$$\sigma^2(V|\varphi) = -\sigma^2(\varphi|V)$$

Les variances négatives, qui risquent d'apparaître si φ et V ne sont pas géométriquement compatibles, n'ont pas de signification par elles-mêmes, et servent simplement d'artifice de calcul.

On définira de la même manière la *covariance dans un champ* V de deux échantillons φ et φ' distincts, occupant l'un par rapport à l'autre une position bien définie et implantés, dans leur ensemble, de manière quelconque à l'intérieur du champ V. Moyennant les mêmes conventions que ci-dessus (passage par l'intermédiaire d'un grand champ V' et de la formule d'additivité), on obtient cette covariance par la formule générale :

$$\sigma(\varphi\varphi'|V) = \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x-x')\,dx\,dx' - \frac{1}{\varphi\varphi'}\int_{v}\int_{v'}\gamma(x-x')\,dx\,dx'. \qquad \text{(VIII,4,7)}$$

On peut, naturellement aussi, caractériser la corrélation des deux volumes φ et φ' dans le champ V par le *coefficient de corrélation* habituel :

$$\rho(\varphi\varphi'|V) = \frac{\sigma(\varphi\varphi'|V)}{\sqrt{\sigma^2(\varphi|V)\sigma^2(\varphi'|V)}}$$

mais il faut bien noter qu'un tel coefficient n'a rien d'intrinsèque. Il dépend du choix du champ V et varie de manière complexe en fonction de V.

En particulier, si le $\gamma(h)$ ne tend pas vers une limite finie $\gamma(\infty)$, mais croît indéfiniment avec $|h|$, les deux variances et la covariance sont, pour V très grand, des infiniments grands équivalents, de sorte qu'à la limite on a toujours :

$$\rho(v v' | \infty) = +1.$$

Cette remarque permet de comprendre pourquoi les coefficients de corrélation ne sont pratiquement pas utilisés en théorie intrinsèque. C'est en réalité la fonction $\gamma(h)$ elle-même qui exprime de la meilleure manière possible la corrélation régnant entre $f(x)$ et $f(x+h)$, abstraction faite de toute influence d'un champ géométrique (c'est-à-dire de manière intrinsèque).

Exemples :

Fonction intrinsèque homogène — Supposons que $\gamma(h)$ soit une fonction homogène d'ordre β, c'est-à-dire vérifiant, pour un scalaire λ quelconque, l'équation :

$$\gamma(\lambda h) = |\lambda|^{\beta} \gamma(h).$$

D'après ce que nous avons dit au paragraphe 2, l'exposant β est d'ailleurs nécessairement inférieur à 2. Calculons la variance $\sigma^2(v|V)$ dans le cas particulier où le volume v est géométriquement homothétique à V dans une homothétie de module λ :

$$\frac{v}{V} = \lambda^n.$$

Dans la deuxième intégrale de la formule générale (VIII,4,4) effectuons le changement de variable $x = \lambda y$, $x' = \lambda y'$ ($dx = \lambda^n dy$, $dx' = \lambda^n dy'$). Il vient :

$$\sigma^2(v|V) = (1 - \lambda^{\beta}) \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x')\, dx\, dx'.$$

Désignons par $\sigma^2(0|V)$ la variance dans V de la variable ponctuelle. On a ainsi :

$$\sigma^2(v|V) = \left[1 - \left(\frac{v}{V} \right)^{\frac{\beta}{n}} \right] \sigma^2(0|V). \qquad \text{(VIII,4,8)}$$

Cette formule s'applique, en particulier, à la fonction intrinsèque isotrope r^{β}.

Fonction intrinsèque de Wijsienne. — Une fonction intrinsèque est dite de Wijsienne si elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$\gamma(\lambda h) = \gamma(h) + 3\alpha \log |\lambda| \qquad \text{(VIII,4,9)}$$

où 3α est une constante, appelée *coefficient de dispersion absolue.*

Le schéma de Wijsien isotrope, caractérisé par une fonction intrinsèque de la forme $3\alpha \log r$, est souvent utilisé en pratique. Lorsque φ est homothétique à V, le même changement de variable que ci-dessus conduit, compte tenu de (VIII,4,9), à la remarquable formule suivante, *dite formule de de Wijs* :

$$\sigma^2(\varphi|V) = \alpha \log \frac{V}{\varphi}. \qquad \text{(VIII,4,10)}$$

5. — Relation entre schémas intrinsèques et représentations transitives.

Il n'existe pas forcément de relation simple entre les schémas intrinsèques, définis, comme nous l'avons fait, comme des fonctions aléatoires à accroissements stationnaires, et les représentations transitives étudiées dans la première partie. Le mode de représentation transitif présente, en effet, un très haut degré de généralité. Il permet de décrire n'importe quelle variable régionalisée évoluant dans un champ géométrique fini V. En contre-partie, le covariogramme transitif $g(h)$ est lié étroitement à la géométrie du champ V, et il n'existe aucun moyen simple de passer de ce champ V à un autre champ V'. Il faut bien voir, d'ailleurs, que cette liaison entre le covariogramme et le champ exprime souvent une zonalité réelle de la régionalisation, par exemple une tendance systématique à l'appauvrissement lorsque l'on va d'un cœur riche aux frontières du champ. En pareil cas, il n'est pas possible de séparer ce qui est imputable à la géométrie du champ et à la régionalisation « en soi ». Ce genre de phénomène, aisément pris en charge par les représentations transitives, est profondément étranger aux schémas intrinsèques, puisque les acroissements ne peuvent en aucune manière être considérés comme stationnaires.

Au contraire, dans le cas où les frontières du champ V n'exercent pas d'influence particulière sur l'allure de la régionalisation, et où tout se passe comme si V avait été découpé arbitrairement au sein d'une régionalisation homogène, qui aurait pu se poursuivre, sans changer de nature, bien au-delà des frontières, la dépendance du covariogramme $g(h)$ relativement à la géométrie de V apparaît comme artificielle, et masque une réalité plus simple. En pareil cas, on a tout intérêt à recourir à la théorie intrinsèque, c'est-à-dire à interpréter la régionalisation réelle comme une réalisation d'un schéma intrinsèque, limitée arbitrairement aux frontières du champ V. La fonction intrinsèque $\gamma(h)$ permet alors d'exprimer, indépendamment de toute interférence géométrique, les caractéristiques de la régionalisation « en soi ». La relation entre les deux modes de représentation intrinsèque et transitif doit, dans ce cas, s'exprimer à l'aide d'une formule donnant la valeur probable $E[g(h)]$ du covariogramme transitif en fonction de la loi de dispersion intrinsèque $\gamma(h)$.

Pour établir cette relation, considérons un schéma intrinsèque, caractérisé par une fonction $\gamma(h)$, et un volume V défini par une variable

géométrique $k(x)$ de covariogramme $K = k * \check{k}$. Si $f(x)$ est une réalisation du schéma, le produit $k(x)f(x)$ constitue une régionalisation limitée au champ V, et donc susceptible d'une représentation transitive : soit donc $g(h)$ son covariogramme transitif

$$\text{(VIII,5,1)} \quad g(h) = \int f(x)\, f(x+h)\, k(x)\, k(x+h)\, dx = (fk) * (\check{f}\check{k}).$$

Relativement au schéma intrinsèque, ce $g(h)$ doit être considéré comme une intégrale stochastique (sous réserve que nous parvenions à lui donner un sens). De même, les moyennes $m(h)$ et $m(-h)$ de $f(x)$ dans les intersections de V et de ses translatés par les translations $+h$ et $-h$, définies selon (V,3,2) par les relations

$$\text{(VIII,5,2)} \quad \begin{cases} m(h) = \dfrac{1}{K(h)} \displaystyle\int k(x)\, f(x)\, k(x-h)\, dx = (fk) * \check{k} \\ m(-h) = \dfrac{1}{K(h)} \displaystyle\int k(x)\, f(x)\, k(x+h)\, dx = (\check{f}\check{k}) * k \end{cases}$$

sont également des intégrales stochastiques. Notons tout de suite que les différences $[m(h) - m(-h)]$ et $\left[m(0) - \dfrac{1}{2}(m(h) + m(-h))\right]$ sont des intégrales stochastiques d'accroissements de la fonction $f(x)$. Elles ont donc une variance finie, et par suite possèdent toujours un sens précis. *En l'absence de dérive linéaire*, c'est-à-dire si $E[f(x+h) - f(x)] = 0$, ces deux différences ont des valeurs probables nulles :

$$\text{(VIII,5,3)} \quad \begin{cases} E[m(h) - m(-h)] = 0 \\ E\left[m(0) - \dfrac{m(h) + m(-h)}{2}\right] = 0. \end{cases}$$

Si nous comparons à (V,3,4) et à (V,4,8), nous voyons que ces relations expriment, en valeur probable, l'indépendance de la variable transitive $k(x)f(x)$ et de son champ géométrique V, à la fois au sens de l'absence de corrélation différée et au sens de l'indépendance interne. En présence d'une dérive linéaire, l'indépendance interne subsisterait seule. Le fait que ces diverses indépendances ne soient assurées qu'en valeur probable seulement est naturellement lié à la nature stochastique de la théorie intrinsèque.

Nous désignerons aussi par $S^2(h)$ et $S^2(-h)$ les variances « locales » de la variable ponctuelle $f(x)$ dans les intersections de V et de ses translatés par $+h$ et $-h$, soit :

$$\text{(VIII,5,4)} \quad \begin{cases} S^2(h) = \dfrac{1}{K(h)} \displaystyle\int k(x)k(x-h)][f(x) - m(h)]^2 dx, \\ S^2(-h) = \dfrac{1}{K(h)} \displaystyle\int k(x)k(x+h)[f(x) - m(-h)]^2\, dx. \end{cases}$$

$S^2(h)$ et $S^2(-h)$ sont des intégrales stochastiques, dont la valeur probable est égale à la variance $\sigma^2(h)$ de la variable dans l'intersection de V

et de son translaté par h, variance définie au paragraphe précédent, et donnée par une formule analogue à (VIII,4,2) :

$$\text{(VIII,5,5)} \quad \mathrm{E}[\mathrm{S}^2(h)] = \mathrm{E}[\mathrm{S}^2(-h)] = \sigma^2(h) = \frac{1}{[\mathrm{K}(h)]^2}\iint k(x)k(x+h)k(x')k(x'+h)\gamma(x-x')\,dx\,dx'.$$

De même, nous désignerons par $\gamma_V(h)$ le demi-variogramme « local »

$$\text{(VIII,5,6)} \quad \gamma_V(h) = \frac{1}{2\mathrm{K}(h)}\int [f(x+h) - f(x)]^2 k(x)k(x+h)\,dx$$

que l'on pourrait construire expérimentalement si l'on connaissait toutes les valeurs prises par la régionalisée $f(x)$ dans son champ V. Relativement au schéma intrinsèque, $\gamma_V(h)$ apparaît comme une véritable aléatoire, dont la valeur probable est naturellement égale à la « vraie » fonction intrinsèque $\gamma(h)$, soit :

$$\text{(VIII,5,7)} \qquad \mathrm{E}[\gamma_V(h)] = \gamma(h)$$

Mais, compte tenu de l'expression (VIII,5,1) du covariogramme transitif $g(h)$, on peut aussi mettre (VIII,5,6) sous la forme :

$$\gamma_V(h) = \frac{1}{2\mathrm{K}(h)}\int k(x)k(x+h)[f^2(x) + f^2(x+h)]\,dx - \frac{g(h)}{\mathrm{K}(h)}.$$

En introduisant les variances locales $\mathrm{S}^2(h)$ et $\mathrm{S}^2(-h)$ définies en (VIII,5,4), on obtient la relation suivante, qui est une relation entre variables aléatoires :

$$\text{(VIII,5,8)} \quad \gamma_V(h) = \frac{1}{2}[\mathrm{S}^2(h) + \mathrm{S}^2(-h) + \left[\frac{m^2(h) + m^2(-h)}{2} - \frac{g(h)}{\mathrm{K}(h)}\right].$$

Le premier membre a une valeur probable égale à la fonction intrinsèque $\gamma(h)$, d'après (VIII,5,7). Il en est donc de même du deuxième membre, d'où, compte tenu de (VIII,5,5) :

$$\text{(VIII,5,9)} \quad \gamma(h) = \sigma^2(h) + \mathrm{E}\left[\frac{m^2(h) + m^2(-h)}{2} - \frac{g(h)}{\mathrm{K}(h)}\right].$$

Cette relation entre $\gamma(h)$ et la valeur probable de l'expression entre crochets, où figure le covariogramme transitif $g(h)$, répond en principe à la question posée dans ce paragraphe. Dans les applications, cependant, on préfère utiliser la moyenne générale $m = m(\mathrm{O})$ de $f(x)$ dans V, plutôt que les moyennes partielles $m(h)$ et $m(-h)$, qu'il faut en principe calculer pour chaque valeur de h. Moyennant des hypothèses supplémentaires, que nous n'examinerons pas ici, mais que l'on pourra supposer dans les applications, on établit entre les valeurs probables de m^2 et $m^2(h)$ la relation suivante :

$$\mathrm{E}[m^2(h) - m^2] = \sigma^2(\mathrm{O}|\mathrm{V}) - \sigma^2(h).$$

Le deuxième membre est égal à la variance dans V de l'intersection de V et de son translaté par h, cette variance étant définie au sens du paragraphe précédent. Compte tenu de cette relation supplémentaire, (VIII,5,9) peut être mise sous la forme :

$$\text{(VIII,5,10)} \qquad \gamma(h) = \sigma^2(0|\mathrm{V}) + \mathrm{E}\left[m^2 - \frac{g(h)}{\mathrm{K}(h)}\right].$$

C'est cette formule que l'on utilisera, le plus souvent, en pratique pour passer du transitif à l'intrinsèque, ou réciproquement.

CHAPITRE IX

THÉORIE INTRINSÈQUE DES CORÉGIONALISATIONS

SOMMAIRE

Ce chapitre, court et facile, étend aux corégionalisations les résultats du chapitre précédent.

Le paragraphe 1 *définit la matrice de codispersion intrinsèque* $\gamma_{ij}(h)$ *et examine ses propriétés.*

Le paragraphe 2 *définit pour les variables à support non ponctuel la notion de covariance de coextension et la notion de covariance dans un champ* V.

Le paragraphe 3 *examine l'indépendance intrinsèque, et ses relations avec l'indépendance interne des représentations transitives, et étudie rapidement le cas où il existe une corrélation intrinsèque.*

1. — Matrice de codispersion intrinsèque.

La théorie intrinsèque des coregionalisations est une généralisation naturelle du chapitre précédent au cas où l'on se donne simultanément plusieurs schémas intrinsèques $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., et apparaît en même temps comme une transposition en terme stochastique de la représentation transitive des corégionalisations étudiées au chapitre v. La théorie stochastique est moins générale que la représentation transitive, puisqu'elle postule le caractère intrinsèque de la corégionalisation, donc l'indépendance de celle-ci vis-à-vis de son champ géométrique. Mais elle permet, en revanche, une étude plus fine et plus approfondie des corrélations des diverses variables entre elles, précisément parce qu'elle réussit à faire abstraction de toute interférence avec la géométrie du champ.

Définition. — Un schéma intrinsèque à plusieurs composantes $f_i(x)$ est un processus stochastique à plusieurs composantes et à accroissements stationnaires. Autrement dit, en désignant par :

(IX,1,1) $$\varepsilon_i(x - x') = f_i(x') - f_i(x)$$

un accroissement de la composante f_i, les lois de répartitions

$$F[\varepsilon_{i_1}(x_1 - x_1'),\ \varepsilon_{i_2}(x_2 - x_2')\ \ldots ;\ x_1, x_1', x_2 x_2'\ \ldots]$$

d'un nombre quelconque d'accroissements pris, pour des indices $i_1 i_2\ \ldots$ arbitraires, sur des points quelconques $x_1 x_1' x_2 x_2'\ \ldots$ sont invariantes pour toute translation d'ensemble de ces points, et ne sont pas modifiées par la connaissance d'une valeur numérique prise par chacune des composantes.

Les moments des accroissement se définissent sans difficulté. Ils sont eux-mêmes stationnaires. Le plus souvent, seuls interviendront les moments d'ordre 1 et 2, de sorte que les résultats obtenus resteront valables dans le cas où le schéma possède seulement le caractère stationnaire d'ordre 2.

Les moments d'ordre 1, $E[f_i(x+h) - f_i(x)]$ mettent en évidence l'existence d'un gradient de dérive linéaire D_i pour chaque composante f_i. Nous supposerons, exactement comme dans le chapitre précédent, que ces différents gradients sont tous nuls, quitte à remplacer, le cas échéant, f_i par $f_i(x) - xD_i$.

Moments d'ordre 2. — Pour introduire commodèment les moments d'ordre deux, considérons une combinaison linéaire des fonctions f_i avec des coefficients λ_i arbitraires :

$$(IX,1,2) \qquad f(x;\ \lambda_i) = \sum_i \lambda_i f_i(x).$$

D'après la définition même du schéma intrinsèque à plusieurs composantes, chacune de ces combinaisons linéaires engendre elle-même un schéma intrinsèque à une seule composante, auquel s'appliquent les résultats du chapitre précédent. Il lui est, en particulier, associé une loi de dispersion intrinsèque, définie, avec la notation (IX,1,1) des accroissements, par :

$$\gamma(h;\ \lambda_i) = \frac{1}{2}\, D^2\Big[\sum_i \lambda_i \varepsilon_i(h)\Big]$$

c'est-à-dire :

$$(IX,1,3) \qquad \gamma(h;\ \lambda_i) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j E[\varepsilon_i(h)\varepsilon_j(h)].$$

Il est naturel de poser

$$(IX,1,4) \quad \gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2}\, E[\varepsilon_i(h)\varepsilon_j(h)]$$
$$= \frac{1}{2}\, E\{[f_i(x+h) - f_i(x)][f_j(x+h) - f_j(x)]\}.$$

Dans le cas $i = j$, le terme $\gamma_{ii}(h) = \gamma_i(h)$ n'est autre que la fonction intrinsèque de $f_i(x)$. Le terme $\gamma_{ij}(h)$ sera, dans le cas général, appelé *fonction de codispersion intrinsèque* des variables f_i et f_j, et l'ensemble des $\gamma_{ij}(h)$ constituera *la matrice de codispersion intrinsèque.*

Propriétés de $\gamma_{ij}(h)$. — A toute propriété d'une fonction intrinsèque $\gamma(h)$ doit correspondre une propriété de la fonction de codispersion $\gamma_{ij}(h)$, que l'on peut mettre en évidence en écrivant que le $\gamma(h; \lambda_i)$ de l'équation (IX,1,3) vérifie, quels que soient les coefficients λ_i, la propriété du $\gamma(h)$.

Ainsi, par exemple, tout $\gamma(h)$ doit être positif. Par suite, pour toute combinaison linéaire limitée à 2 termes $\lambda_i f_i + \lambda_j f_j$, la forme quadratique :

$$\lambda_i^2 \gamma_i(h) + 2\lambda_i \lambda_j \gamma_{ij}(h) + \lambda_j^2 \gamma_j(h)$$

doit être définie positive, d'où résulte l'inégalité de Schwarz :

$$|\gamma_{ij}(h)| \leqslant \sqrt{\gamma_i(h)\,\gamma_j(h)}. \qquad \text{(IX,1,5)}$$

Cette inégalité permet de définir un *coefficient de codispersion*

$$R_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_i(h)\,\gamma_j(h)}} \qquad \text{(IX,1,6)}$$

nécessairement compris entre — 1 et + 1, et qui n'est pas autre chose que le coefficient de corrélation des accroissements

$$f_i(x+h) - f_i(x) \qquad \text{et} \qquad f_j(x+h) - f_j(x).$$

De même, à partir de la relation (VIII,1,9), on peut voir que la fonction de codispersion intrinsèque $\gamma_{ij}(h)$ permet le calcul de la covariance d'un accroissement quelconque de f_i et d'un accroissement quelconque de f_j. Appliquons, en effet, (VIII,1,9) à la covariance des deux accroissements $f(x'; \lambda_i) - f(x; \lambda_i)$ et $f(y'; \lambda_i) - f(y; \lambda_i)$. Compte tenu de (IX,1,2) et (IX,1,3), on obtient :

$$\sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \mathrm{E}[\varepsilon_i(x' - x)\varepsilon_j(y' - y)]$$
$$= \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j [\gamma_{ij}(y' - x) + \gamma_{ij}(y - x') - \gamma_{ij}(y - x) - \gamma_{ij}(y' - x')].$$

D'où, par identification en λ_i :

$$\mathrm{E}\{[f_i(x') - f_i(x)][f_j(y') - f_j(y)]\}$$
$$= \gamma_{ij}(y' - x) + \gamma_{ij}(y - x') - \gamma_{ij}(y - x) - \gamma_{ij}(y' - x').$$

Ainsi, *la matrice de codispersion permet de déterminer tous les moments d'ordre* 2.

2. — Variables non ponctuelles et covariance de coextension.

Le procédé qui consiste à étendre à $\gamma_{ij}(h)$ une propriété des $\gamma(h, \lambda_i)$ de la formule (IX,1,3) permet de définir immédiatement les covariances de coextension. Etant données deux fonctions de pondération $p_1(x)$ et $p_2(x)$, de somme unité

$$\int p_1(x)\,dx = \int p_2(x)\,dx = 1$$

considérons les variables aléatoires :

$$\begin{cases} Y_i = \int p_1(x) f_i(x)\, dx \\ Z_i = \int p_2(x) f_i(x)\, dx \\ Y = \sum_i \lambda_i Y_i \\ Z = \sum_i \lambda_i Z_i. \end{cases}$$

La variance d'extension de Y à Z se met sous la forme

$$D^2(Y - Z) = -\iint [p_1(x) - p_2(x)][p_1(y) - p_2(y)]\, \gamma(x - y)\, dx\, dy$$

Il suffit d'identifier les termes en $\lambda_i\lambda_j$ pour obtenir la *covariance de coextension* de $(Y_i - Z_i)$ et $(Y_j - Z_j)$

$$\text{(IX,2,1)} \quad E[(Y_i - Z_i)(Y_j - Z_j)] = -\iint [p_1(x) - p_2(x)][p_1(y) - p_2(y)]\, \gamma_{ij}(x - y)\, dx\, dy.$$

En particulier, prenons pour T_i et Z_i les moyennes stochastiques de f_i dans deux volumes V et V′ :

$$\begin{cases} Y_i = \frac{1}{V} \int_V f_i(x)\, dx \\ Z_i = \frac{1}{V'} \int_{V'} f_i(x)\, dx. \end{cases}$$

Dans ce cas, la formule générale (IX,2,1) prend la forme :

$$\text{(IX,2,2)} \quad E[(Y_i - Z_i)(Y_j - Z_j)] = \frac{2}{VV'} \int_V \int_{V'} \gamma_{ij}(x - y)\, dx\, dy - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma_{ij}(x - y)\, dx\, dy - \frac{1}{V'^2} \int_{V'} \int_{V'} \gamma_{ij}(x - y)\, dx\, dy.$$

Elle représente la covariance des erreurs $Y_i - Z_i$ et $Y_j - Z_j$ commises en étendant au volume V′ les teneurs moyennes du volume V en f_i et en f_j. Dans le cas particulier $i = j$, on retrouve, naturellement, les variances d'extension habituelles.

De même, encore, on définira *la covariance dans un champ* V *des deux variables* Y_i et Y_j de même support non ponctuel v :

$$\begin{cases} Y_i = \frac{1}{v} \int_v f_i(x)\, dx \\ Y_j = \frac{1}{v} \int_v f_j(x)\, dx \end{cases}$$

en appliquant les résultats du paragraphe (VIII,4) à la combinaison linéaire

$\Sigma\lambda_i Y_i$ et en identifiant les termes en $\lambda_i\lambda_j$. Tout comme au chapitre précédent, lorsque le support n'est pas ponctuel, cette définition n'est vraiment claire que s'il existe une partition de V par des volumes v égaux et translatés les uns des autres, ou encore si v est petit vis-à-vis de V. On obtient, dans les deux cas, cette covariance $\sigma_{ij}(v|V)$ sous forme suivante, qui généralise (VIII,4,4) :

$$(IX,2,3) \quad \sigma_{ij}(v|V) = \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma_{ij}(x-y)\,dx\,dy - \frac{1}{v^2}\int\int_v \gamma_{ij}(x-y)\,dx\,dy.$$

On en déduit immédiatement la relation d'additivité :

$$(IX,2,4) \qquad \sigma_{ij}(v|V) = \sigma_{ij}(v|V') + \sigma_{ij}(V'|V)$$

qui permet d'adopter, dans tous les cas, la formule (IX,2,3) comme définition conventionnelle de la covariance des variables Y_i et Y_j de même support v dans un volume VV quelconque.

3. — L'indépendance intrinsèque.

Par définition, nous dirons que les deux variables ponctuelles $f_i(x)$ et $f_j(x)$ sont *intrinsèquement indépendantes* si leur fonction de codispersion intrinsèque $\gamma_{ij}(h)$ est identiquement nulle :

$$(IX,3,1) \qquad \gamma_{ij}(h) \equiv 0$$

Cette condition exprime simplement que les accroissements

$$[f_i(x+h) - f_i(x)] \qquad \text{et} \qquad [f_j(x+h) - f_j(x)]$$

ont un coefficient de corrélation nul quel que soit h. Il résulte alors immédiatement de (IX,1,7) que deux accroissement quelconques

$$[f_i(x) - f_i(x')] \qquad \text{et} \qquad f_j(y) - f_j(y')]$$

ont également une corrélation nulle, quels que soient les quatre points x,x', y et y'. De même, toute covariance d'extension du type (IX,2,1) ou (IX,2,2), est égale à zéro, et cela signifie que toutes les estimations des valeurs moyennes de f_i et f_j dans des volumes quelconques seront toujours faites indépendamment les unes des autres. De même encore la covariance dans un champ V introduite en (IX,2,4) est également nulle, de sorte que les teneurs en i et en j d'un même échantillon v sont toujours sans corrélation, quelles que soient les caractéristiques de v et V.

Relation avec l'indépendance interne. — Supposons la condition (IX,3,1) d'indépendance intrinsèque réalisée. Il va en résulter, en représentation transitive, des propriétés particulières pour la corégionalisation $k(x)f_i(x)$ limitée arbitrairement à un champ V de variables géométrique $k(x)$. Appliquons, en premier lieu, la relation (VIII,5,9) à la combinaison linéaire

$\lambda_i f_i + \lambda_j f_j$. On fait apparaître, à gauche, la fonction de codispersion $\gamma_{ij}(h)$ et, à droite, le covariogramme rectangle transitif $C_{ij}(h)$ défini en (V,1,5). En identifiant les termes $\lambda_i\lambda_j$, on obtient ainsi :

$$\gamma_{ij}(h) = \sigma_{ij}(h) + E\left[\frac{m_i(h)\, m_j(h) + m_i(-h)\, m_j(-h)}{2} - \frac{C_{ij}(h)}{K(h)}\right].$$

Mais, d'après (IX,3,1), $\gamma_{ij}(h)$ et la covariance $\sigma_{ij}(h)$ de f_i et f_j dans l'intersection de V avec son translaté par h sont nulles tous deux. Il reste ainsi :

$$\text{(IX,3,2)} \quad E\left[\frac{C_{ij}(h)}{K(h)} - \frac{m_i(h)\, m_j(h) + m_i(-h)\, m_j(-h)}{2}\right] = 0.$$

On voit apparaître, exprimée en valeur probable, la condition symétrisée (V,4,6) pour qu'il n'y ait pas de corrélation différée.

De la même manière, appliquons la relation (VIII,5,10) à la même combinaison linéaire $\lambda_i f_i + \lambda_j f_j$. Par identification des termes en $\lambda_i\lambda_j$, on obtient :

$$\gamma_{ij}(h) = \sigma_{ij}(0|V) + E\left[m_i m_j - \frac{C_{ij}(h)}{K(h)}\right].$$

et, comme ici γ_{ij} et $\sigma_{ij}(0|V)$ sont nulles, il reste :

$$\text{(IX,3,2) bis} \qquad E\left[\frac{C_{ij}(h)}{K(h)} - m_i m_j\right] = 0$$

En comparant à (V,2,7), on voit que cette relation n'est autre que la condition d'indépendance interne, exprimée en valeur probable.

Ainsi, l'indépendance intrinsèque entraîne l'indépendance interne, et, sauf dérive linéaire, l'absence de corrélation différée, mais en valeur probable seulement : le fait que le résultat ne s'énonce qu'en valeur probable est naturellement lié à la nature stochastique de la théorie intrinsèque.

Corrélations intrinsèques. — En général, $\gamma_{ij}(h)$ n'est pas identiquement nulle, et les variables f_i et f_j sont liées par une dépendance intrinsèque. La mesure de leur degré de dépendance est donnée par $\gamma_{ij}(h)$ elle-même, ou, si l'on veut, par le *coefficient de codispersion* $R_{ij}(h)$ défini en (IX,1,6), qui est un coefficient de corrélation entre accroissements, et non entre les variables elles-mêmes. On pourra s'intéresser, en particulier, à la limite, si elle existe, de $R_{ij}(h)$ quand h tend vers zéro. Le coefficient R_{ij} présente le caractère intrinsèque, en ce sens qu'il ne dépend pas du champ géométrique V dans lequel on étudie la corégionalisation. Mais, au contraire de la fonction $\gamma_{ij}(h)$ elle-même, il ne se généralise pas de manière simple au cas de variables à support non ponctuel.

De la définition (IX,2,3) de la covariance $\sigma_{ij}(v|V)$ dans le champ V des variables i et j de support v, on peut déduire un coefficient de corrélation

$$\text{(IX,3,3)} \qquad \rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}(v|V)}{\sqrt{\sigma_i^2(v|V)\sigma_j^2(v|V)}}.$$

Mais ce coefficient n'a pas de caractère intrinsèque, car il dépend, en général d'une manière complexe, du choix du champ géométrique V. Suivant le comportement à l'infini de γ_i, γ_j, et γ_{ij}, il peut tendre, lorsque V devient infini, vers une limite particulière, mais en général cette limite dépend de la manière dont on fait tendre V vers l'infini.

Il y a, cependant, un cas particulier remarquable où le coefficient ρ_{ij} présente le caractère intrinsèque. C'est le cas où les trois fonctions γ_i, γ_j et γ_{ij} sont proportionnelles à une même fonction $\gamma(h)$, soit :

$$\text{(IX,3,4)} \qquad \begin{cases} \gamma_i(h) = \alpha_i \gamma(h) \\ \gamma_j(h) = \alpha_j \gamma(h) \\ \gamma_{ij}(h) = \alpha_{ij} \gamma(h) \end{cases}$$

En effet, σ_{ij}, σ_i^2 et σ_j^2 se calculent en appliquant un même opérateur linéaire $\mathcal{E}$ à γ_{ij}, γ_i et γ_j, de sorte que (IX,3,3) donne ici :

$$\rho_{ij} = \frac{\alpha_{ij} \mathcal{E}(\gamma)}{\sqrt{\alpha_i \mathcal{E}(\gamma) \alpha_j \mathcal{E}(\gamma)}} = \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_i \alpha_j}}.$$

On vérifie d'ailleurs que dans ce cas ρ_{ij} est égal au coefficient de codispersion $R_{ij}(h)$ de l'équation (IX,1,6). Tous deux sont constants et égaux à :

$$\text{(IX,3,5)} \qquad \rho_{ij} = R_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_i \alpha_j}}.$$

On parle, dans ce cas, de corrélation intrinsèque. On ne peut d'ailleurs espérer observer de corrélation intrinsèque qu'entre des variables de même nature, liées génétiquement l'une à l'autre. En général, des variables de nature différentes, comme (par exemple, dans l'industrie minière, la puissance et la teneur d'une formation) ont des fonctions intrinsèques qui ne présentent pas le même comportement analytique au voisinage de l'origine, de sorte que les relations (IX,3,4) ne sont pas vérifiées et que les corrélations ne peuvent pas être intrinsèques.

CHAPITRE X

DISTRIBUTIONS ALÉATOIRES, ET THÉORIE INTRINSÈQUE POUR LES DISTRIBUTIONS

SOMMAIRE

Ce chapitre est un rappel de la théorie des distributions aléatoires et un exposé de la théorie intrinsèque pour les distributions. Tout comme le chapitre III, il n'est pas nécessaire à la compréhension du reste de l'ouvrage. Cependant, le lecteur qui ne connaîtrait pas la théorie des distributions trouvera, dans l'Annexe A, *un exposé sommaire de cette théorie, lui permettant, s'il le désire, de suivre le présent exposé.*

Le paragraphe 1 *définit une distribution aléatoire* T *par les lois* $F[T(\varphi_i)]$ *ou par la fonctionnelle caractéristique* $C(\varphi) = E[\exp iT(\varphi)]$, *définit la transformée de Fourier* $\tau = \mathcal{F}T$, *examine les deux cas particuliers des distributions stationnaires et à accroissements indépendants, et définit les moments* M_k *comme distributions d'un espace à* nk *dimensions. Le moment d'ordre 1 est la distribution* M *telle que* $M(\varphi) = E[T(\varphi)]$.

Le paragraphe 2 *étudie la covariance* $K(xy)$, *distribution définie par*

$$K[\varphi_1(x)\varphi_2(y)] = E[T(\varphi_1)T(\varphi_2)].$$

Pour une distribution aléatoire stationnaire d'ordre 2, K *se ramène à une distribution* $K(x)$ *de l'espace à* n *dimensions agissant sur les produits de convolution* $\varphi_1 * \check{\varphi}_2$: $K(x)$ *est de type positif. Dans le cas d'accroissements sans corrélation, on a* $K(xy) = \delta(y - x)K(x)$.

Le paragraphe 3 *rappelle le théorème classique, suivant lequel les distributions stationnaires d'ordre 2 et à accroissements sans corrélation s'échangent par transformation de Fourier. Il en découle un premier procédé permettant de construire numériquement des modèles de régionalisation de covariance* $K(h)$ *données.*

Le paragraphe 4 *montre que la régularisée* $\check{\alpha} * T$ *a pour fonctionnelle caractéristique* $C(\alpha * \varphi)$ *et pour covariance* $K * \alpha * \check{\alpha} = K * A$. *Lorsque* T *est à accroissements indépendants et densité de variance constante* μ^2, *la régularisée a pour covariance* $\mu^2 A$, *d'où un deuxième procédé de construction de modèle numérique. Dans ce cas, les lois de répartition peuvent être complètement déterminées par la fonctionnelle caractéristique elle-même, ou par ses moments.*

Le paragraphe 5 *définit la dérivée* $D^p T$ *d'une distribution aléatoire* T *par sa fonctionnelle caractéristique* $C[(-1)^p D^p \varphi]$. *Toute distribution aléatoire est indé-*

finiment dérivable. Le moment d'ordre k *de* $D^p T$ *est dérivé d'ordre* kp *de* M_k. *Dans le cas stationnaire d'ordre 2,* $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$ *a pour covariance* $-\frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2}$.

Le paragraphe 6 *définit les distributions aléatoires intrinsèques comme distributions stationnaires n'agissant que sur les fonctions de bases* φ *de somme nulle. Leurs dérivées sont stationnaires et agissent sur toutes les fonctions de base. Le moment d'ordre 1 met en évidence une dérive linéaire. La covariance* K *est seulement de type positif conditionnel (le produit de* $\mathcal{F}K$ *par toute forme quadratique définie positive doit être une mesure positive). Exemple de* $\log \frac{1}{r}$ *et* r^λ *pour* $\lambda < 2$. *Les variances d'extension s'expriment à l'aide d'une formule unique qui contient, comme cas particulier, toutes celles du chapitre VIII. On examine, pour terminer* l'effet de pépite.

1. — Définition des distributions aléatoires.

En vue d'étendre aux distributions la théorie des schémas intrinsèques, il convient tout d'abord de rappeler la notion de distribution aléatoire — généralisation naturelle de la notion de fonction aléatoire. En toute rigueur, pour probabiliser un espace de distributions $\mathcal{C}'$, défini comme l'ensemble des fonctionnelles linéaires continues agissant sur les fonctions de base d'un espace $\mathcal{C}$ donné, il convient de définir sur $\mathcal{C}'$ une σ-algèbre et une probabilité, c'est-à-dire une mesure sommable à l'unité définie pour cette σ-algèbre. Cette définition, la seule rigoureuse, conduit à des spéculations abstraites qui ne peuvent trouver place ici. Nous nous contenterons de la définition suivante, non rigoureuse, mais pragmatique :

Définition. — Etant donné un espace de distribution $\mathcal{C}'$ défini sur un espace de fonctions de base $\mathcal{C}$, nous dirons qu'une distribution T de $\mathcal{C}'$ est définie en tant que distribution aléatoire, si, pour tout ensemble de fonctions de bases φ_i en nombre arbitraire k, les nombres $T(\varphi_i)$ sont des variables aléatoires, dont la loi de répartition $F[T(\varphi_1), T(\varphi_2) \ldots T(\varphi_k)]$ est connue.

Ces fonctions de répartition F, dont l'ensemble définit la distribution aléatoire T ne sont pas quelconques. Nous leur imposerons les deux conditions suivantes :

1. — Pour toutes fonctions de base $\varphi_1 \ldots \varphi_k$, on a :

$$\begin{cases} F[T(\varphi_1), \ \ldots \ T(\varphi_{k-1}), \infty] = F[T(\varphi_1), \ \ldots \ T(\varphi_{k-1})] \\ F[T(\varphi_1), \ \ldots \ T(\varphi_{k-1}), -\infty] = 0. \end{cases}$$

2. — Si les fonctions de base φ_n convergent vers une fonction de base ψ les $T(\varphi_n)$ convergent vers $T(\psi)$ en moyenne quadratique.

De cette dernière condition résulte que lorsque k suites de fonctions de base $\varphi_n^1 \ldots \varphi_n^k$ convergent vers k fonctions de base $\psi^1 \ldots \psi^k$, la loi des $T(\varphi_n^i)$ converge vers la loi des $T(\psi^i)$, au sens de la convergence en loi. De plus, si les $T(\varphi_n^i)$ admettent des moments d'ordre 1 et 2, ces moments convergent vers les moments correspondants des $T(\psi^i)$.

Fonctionnelle caractéristique. — D'une manière plus synthétique, on obtient une définition équivalente à la précédente en se donnant *la fonctionnelle caractéristique* $C(\varphi)$ qui, à toute fonction de base φ, associe l'espérance mathématique de l'exponentielle $e^{iT(\varphi)}$:

$$(X,1,1) \qquad C(\varphi) = E[e^{iT(\varphi)}].$$

La donnée de $C(\varphi)$ est bien équivalente à celle de toutes les lois

$$F[T(\varphi_1) \ \dots \ T(\varphi_k)].$$

En effet, si toutes les lois F sont connues, $C(\varphi)$ est bien déterminée. Inversement, si $C(\varphi)$ est connue, elle permet de retrouver toutes les lois F. En prenant, en effet,

$$\varphi = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + \cdots + u_k\varphi_k$$

$\varphi_1 \dots \varphi_k$ étant des fonctions de bases quelconques, la fonction φ ainsi définie appartient à $\mathcal{E}$, et par suite $C(\varphi)$ est connue. Comme on a :

$$(X,1,2) \qquad C(\varphi) = E\{\exp[iu_1\, T(\varphi_1) + \cdots + iu_k T(\varphi_k)]\}$$

$C(\varphi)$ n'est pas autre chose que la fonction caractéristique de la loi de répartition $F[T(\varphi_1) \dots T(\varphi_k)]$.

La condition de continuité 2 entraîne que la fonctionnelle caractéristique $C(\varphi)$ est continue, c'est-à-dire que $C(\varphi_i)$ converge vers $C(\varphi)$ lorsque φ_i converge vers φ au sens de la convergence utilisée dans $\mathcal{E}$.

La fonctionnelle caractéristique permet de même de définir commodément un ensemble de distributions aléatoires $T_1, T_2, \dots, T_p$ non indépendantes. On prend, dans ce cas :

$$(X,1,3) \quad C(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_p) = E\{\exp i[T_1(\varphi_1) + \cdots + T_p(\varphi_p)]\}$$

Transformée de Fourier. — Le plus souvent, nous prendrons comme espace $\mathcal{E}'$ l'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées, définies sur les fonctions de base indéfiniment dérivables et décroissant rapidement à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées, c'est-à-dire sur l'espace $\mathcal{S}$. Parfois, cependant, nous nous limiterons à l'espace des mesures à croissance lente, de manière à pouvoir utiliser, parmi les fonctions de base, les fonctions caractéristiques (ensemblistes) d'ensembles boréliens v bornés, c'est-à-dire les fonctions de prélèvement décrivant la prise d'échantillons v. Dans tous les cas, qu'il s'agisse de distributions tempérées ou de mesure à croissance lente, la transformation de Fourier sera possible.

Soient φ une fonction de base de $\mathcal{S}$, et $\psi = \mathcal{F}\varphi$ sa transformée de Fourier. qui est également une fonction de $\mathcal{S}$. La transformée

$$\tau = \mathcal{F}T$$

d'une distribution T est définie par :

$$\tau(\psi) = T(\varphi)$$

Si T est une distribution aléatoire, sa transformée de Fourier τ est donc définie également, en tant que distribution aléatoire, par sa fonctionnelle caractéristique $\Gamma(\psi)$, qui se déduit de la fonctionnelle caractéristique $C(\varphi)$ de T par :

$$(X,1,4) \qquad \begin{cases} \Gamma(\psi) = C(\varphi) \\ \psi = \mathcal{F}(\varphi). \end{cases}$$

Distribution aléatoire stationnaire. — Une distribution aléatoire T est dite stationnaire si toutes les lois F restent invariantes pour une translation affectant simultanément les fonctions $\varphi_1 \ldots \varphi_k$ (c'est-à-dire lorsque l'on remplace les $\varphi_j(x)$ par $\varphi_j(x - h)$, h étant un vecteur quelconque). On peut aussi considérer la translation réciproque τ_{-h} affectant la distribution T :

$$\tau_{-h} * T[\varphi(x)] = T[\tau_h * \varphi) = T[\varphi(x - h)]$$

et dire que les $\tau_{-h} * T(\varphi_j)$ ont même loi de répartition que les $T(\varphi_j)$. Avec la fonctionnelle caractéristique, la même définition s'écrit :

$$(X,1,5) \qquad C(\tau_h * \varphi) = C(\varphi)$$

Distribution aléatoire à accroissements indépendants. — Une distribution aléatoire T sera dite à accroissements indépendants si, pour tout ensemble de fonctions de base φ_i à supports V_i disjoints, c'est-à-dire tels que

$$V_i \cap V_j = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \neq j$$

les variables aléatoires $T(\varphi_i)$ sont mutuellemment indépendantes, ce qui s'écrit sous les deux formes équivalentes suivantes :

$$(X,1,6) \qquad \begin{cases} F[T(\varphi_1)\, T(\varphi_2) \ldots T(\varphi_k)] = F[T(\varphi_1)]\, F[T(\varphi_2)] \ldots F[T(\varphi_k)] \\ C(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_k) = C(\varphi_1)\, C(\varphi_2) \ldots C(\varphi_k). \end{cases}$$

Si T est une mesure aléatoire, on peut prendre comme φ_i les fonctions caractéristiques (ensemblistes), ou fonctions de prélèvements d'ensembles boréliens disjoints V_i. Alors, les quantités de métal $Q_i = T(\varphi_i)$ portées par ces échantillons disjoints V_i sont des variables aléatoires indépendantes.

Les Moments. — Supposons que, pour k fonctions de base quelconques, le moment

$$(X,1,7) \qquad M_k(\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_k) = E[T(\varphi_1)\, T(\varphi_2) \ldots T(\varphi_k)]$$

existe toujours. On dira que la distribution aléatoire T admet un moment d'ordre k. Le moment d'ordre k définit une fonctionnelle agissant sur un ensemble de k fonctions de base $\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_k$, fonctionnelle, d'ailleurs linéaire et continue pour $k \leqslant 2$, d'après la condition de continuité 2 imposée aux lois F. Dans l'espace à kn dimensions, produit topologique

de k espace à n dimensions $X_1, X_2 \ldots X_k$, il lui correspond une fonctionnelle linéaire et continue agissant sur les fonctions de la forme

$$\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2) \quad \ldots \quad \varphi_k(x_k)$$

x_i désignant ici un point de l'espace à n dimensions X_i. On montre que l'on peut alors définir l'action de M_k sur une fonction de base quelconque $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_k)$ de cet espace à nk dimension, de sorte *que* M_k *constitue une distribution de l'espace à* nk *dimensions* (au moins pour $k \leqslant 2$).

Le moment d'ordre 1, M_1, que l'on notera simplement M, est, en particulier, une distribution de l'espace à n dimensions agissant sur toute fonction de base φ selon la formule

$$\text{(X,1,8)} \qquad M(\varphi) = E[T(\varphi)]$$

Dans toute la suite, nous supposerons

$$\text{(X,1,9)} \qquad M = 0$$

Il est toujours possible, en effet, de se ramener à ce cas en remplaçant la distribution aléatoire T par T — M.

2. — La distribution de covariance.

Le moment d'ordre 2, comme nous l'avons vu, définit une distribution M_2 de l'espace à $2n$ dimensions, distribution que nous noterons K ou $K(x, y)$, x et y représentant des points de deux espaces à n dimensions. $K(xy)$ est appelée *distribution de covariance.* Elle agit sur le produit $\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$ de deux fonctions de base φ_1 et φ_2 selon la formule

$$\text{(X,2,1)} \qquad K[\varphi_1(x)\varphi_2(y)] = E[T(\varphi_1)\,T(\varphi_2)]$$

Compte tenu de (X,1,9), on voit qu'il s'agit, effectivement, de la covariance des variables aléatoires $T(\varphi_1)$ et $T(\varphi_2)$. En particulier, en prenant $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, on obtient la variance de $T(\varphi)$ sous la forme :

$$\text{(X,2,2)} \qquad D^2T[(\varphi)] = K[\varphi(x)\,\varphi(y)]$$

Nous allons examiner plus en détail les cas particuliers des distributions aléatoires stationnaires et à accroissements indépendants.

Distribution aléatoire stationnaire d'ordre 2. — Si T est une distribution aléatoire stationnaire, son moment d'ordre 1, M_1, est une simple constante, que nous supposons d'ailleurs égale à 0 conformément à (X,1,9). Sa covariance K doit être invariante pour toute translation h, ce qui s'écrit

$$\tau_h(x)\tau_h(y) * K(x, y) = K(x, y)$$

ou, sous forme explicite

$$\text{(X,2,3)} \qquad K[\varphi_1(x + h)\,\varphi_2(y + h) = K[\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)]$$

Inversement, une distribution aléatoire T dont le moment M_1 est une constante et dont la covariance vérifie (X,2,3) sera dite *stationnaire d'ordre* 2. En général, elle ne sera pas stationnaire au sens strict, car (X,1,5) n'est pas une conséquence de (X,2,3). Dans la plupart des applications, on se contente du caractère stationnaire d'ordre 2.

Si $K(x, y)$ est une fonction ordinaire, (X,2,3) s'écrit :

$$\iint K(x, y)\, \varphi_1(x)\, \varphi_2(y)\, dx\, dy = \iint K(x, y) \varphi_1(x + h) \varphi_2(y + h)\, dx\, dy$$

et on en déduit immédiatement la relation

$$K(x - h, y - h) = K(x, y)$$

qui montre que $K(x, y)$ est de la forme $K(x - y)$. Autrement dit, il existe une fonction $K(h)$, de l'espace à n dimensions, telle que l'on ait :

$$\iint K(x, y)\, \varphi_1(x)\, \varphi_2(y)\, dx\, dy = \iint K(h)\, \varphi_1(x + h)\, \varphi_2(x)\, dx\, dh$$

En intégrant d'abord en x, on fait apparaître le produit de convolution

$$\varphi_1 * \check{\varphi}_2 = \int \varphi_1(x) \varphi_2(x - h)\, dx = \int \varphi_1(x + h) \varphi_2(x)\, dx$$

Ainsi, en notation de distribution, on a

$$K(x, y)[\varphi_1(x)\varphi_2(y)] = K(h)[\varphi_1 * \check{\varphi}_2] = K(h)[\check{\varphi}_1 * \varphi_2]$$

La deuxième égalité s'obtient en échangeant φ_1 et φ_2, et montre que K est paire :

$$K(h) = K(-h)$$

Si $K(x, y)$ est une distribution, la relation (X,2,3) montre que $K(x, y)$ agit de la même manière sur deux fonctions de bases φ_1 et φ_2 et leurs translatées $\tau_{-h} * \varphi_1$ et $\tau_{-h} * \varphi_2$. Comme on a :

$$\tau_{-h} * \varphi_1 * \check{\tau}_{-h} * \check{\varphi}_2 = \tau_{-h} * \tau_h * \varphi_1 * \check{\varphi}_2 = \varphi_1 * \check{\varphi}_2$$

on voit qu'il correspond à $K(x, y)$ une fonctionnelle $K(h)$ de l'espace à n dimensions, agissant sur les fonctions de la forme $\varphi_1 * \varphi_2$, fonctionnelle d'ailleurs bi-linéaire

$$K[\Sigma \lambda_i \lambda_j \varphi_i * \varphi_j] = \Sigma \lambda_i \lambda_j K[\varphi_i * \check{\varphi}_j]$$

et continue d'après la condition de continuité imposée aux lois F. Ainsi $K(h)$ est une distribution de l'espace à n dimensions, définie par

(X,2,4) $$K(h)[\varphi_1 * \check{\varphi}_2] = K(xy)[\varphi_1(x)\varphi_2(y)]$$

Cette distribution $K(h)$ sera encore appelée *covariance* de la distribution T stationnaire d'ordre 2. Elle est obligatoirement paire et de *type positif*, puisque :

$$(X,2,5) \qquad K[\varphi * \check{\varphi}] = D^2[T(\varphi)] \geqslant 0$$

D'après le théorème de Bochner (Annexe A-9-2), pour que K soit une distribution de type positif, il faut et il suffit que sa transformée de Fourier χ soit une mesure positive. On a d'ailleurs, en désignant par $\psi = \mathcal{F}\varphi$ la transformée de φ :

$$D^2[T(\varphi)] = K[\varphi * \check{\varphi}] = \chi[\psi\bar{\psi}] = \chi[|\psi|^2]$$

Si la mesure χ est sommable, K est une fonction continue de type positif, et la variance $K(0)$ a une valeur finie, égale à la somme de χ. Si χ n'est pas sommable, la distribution K ne peut pas être une fonction continue.

Distributions aléatoires à accroissements sans corrélation. — Si T est une distribution aléatoire à accroissements indépendants, au sens de la relation (X,1,6), et si son moment d'ordre 1 est nul, on a, pour deux fonctions de bases φ_1 et φ_2 à supports disjoints :

$$(X,2,6) \qquad K(xy)\,[\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)] = E[T(\varphi_1)\,T(\varphi_a)] = 0$$

Inversement, si (X,2,6) est vérifiée, on dira que T est une distribution aléatoire à *accroissements sans corrélation*. En général, on ne pourra pas affirmer que les accroissements sont indépendants, car (X,1,6) n'est pas une conséquence de (X,2,6). Dans la plupart des applications, on se contente de l'absence de corrélation entre accroissements.

Examinons comment se présente la distribution de covariance $K(xy)$ lorsque (X,2,6) est vérifiée. Lorsque φ_1 et φ_2 ont leurs supports disjoints dans l'espace à n dimensions, le support du produit $\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$, dans l'espace à $2n$ dimensions des (x, y) a une intersection nulle avec l'hyperplan bissecteur $x = y$. Comme les produits $\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$ et leurs combinaisons linéaires sont partout denses dans l'espace des fonctions de base $\varphi(xy)$, on voit que $K[\varphi(x, y)]$ est nul pour toute fonction de base φ dont le support ne coupe pas l'hyperplan bissecteur $x = y$, et, par suite, la distribution $K(x, y)$ a elle-même son support contenu dans cet hyperplan.

Il existe alors une distribution $K(x)$, de l'espace à n dimensions, telle que l'on ait, pour deux fonctions de base φ_1 et φ_2 quelconques :

$$(X,2,7) \qquad K(x, y)\,[\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)] = K(x)\,[\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)].$$

Dans le cas particulier où φ_1 et φ_2 ont leurs supports disjoints, on a $\varphi_1(x)\,\varphi_2(x) \equiv 0$ et on retrouve bien (X,2,6). On peut écrire aussi, symboliquement, avec la mesure de Dirac $\delta(y - x)$

$$(X,2,8) \qquad K(x, y) = \delta(y - x)\,K(x).$$

Cette distribution $K(x)$, qui agit sur le produit $\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)$ dans l'espace à n dimensions comme $K(x, y)$ sur $\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$ dans l'espace à $2n$ dimensions peut être appelée *densité de variance*. C'est *une mesure positive*. En effet, la variance de $T(\varphi)$, obligatoirement positive, est donnée par :

$$\text{(X,2,9)} \qquad D^2[T(\varphi)] = K(\varphi^2) > 0$$

d'où résulte que $K(x)$ est une distribution positive, c'est-à-dire, comme on sait, obligatoirement une mesure positive. Elle agit, en particulier, sur les fonctions caractéristiques (ensemblistes), ou fonction de prévèlement $p(x)$ des ensembles, ou échantillons, boréliens v. La variance de la quantité de métal $Q = T(p)$ contenue dans l'échantillon v est donnée, puisque $p^2 = p$, par

$$\text{(X,2,10)} \qquad D^2(Q) = K(x) = \int_v dK(x)$$

Elle est égale à la somme dans v de la mesure K, qui joue bien ainsi le rôle d'une densité de variance.

3. — Analyse harmonique d'une distribution stationnaire d'ordre 2.

Un théorème classique démontre que les distributions aléatoires stationnaires d'ordre 2 et à accroissements sans corrélation s'échangent réciproquement dans la transformation de Fourier.

Une distribution aléatoire T tempérée quelconque a une transformée de Fourier τ définie par :

$$\begin{cases} T(\varphi) = \tau(\psi) \\ \psi = \mathcal{F}\varphi \end{cases}$$

de sorte que les $T(\varphi)$ et les $\tau(\psi)$ ont même loi de répartition. Soient $K(x, y)$ et $\chi(u, v)$ les distributions de covariance de T et τ, définies dans les espaces à $2n$ dimensions des (x, y) et des (u, v) respectivement. Comme les $T(\varphi)$ et les $\tau(\psi)$ ont même loi de répartition, on a :

$$\text{(X,3,1)} \qquad \begin{cases} C(u, v)[\psi_1(u)\,\psi_2(v)] = K(x, y)[\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)] \\ \psi_1 = \mathcal{F}\varphi_1 \\ \psi_2 = \mathcal{F}\varphi_2 \end{cases}$$

Mais, dans l'espace à $2n$ dimensions, $\psi_1(u)\psi_2(v)$ est la transformée de Fourier de $\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$. L'équation (X,3,1) signifie donc, par définition, que χ est la transformée de Fourier de K (dans l'espace à $2n$ dimensions).

$$\text{(X,3,2)} \qquad \chi(u,\ v) = \mathcal{F}K(x,\ y).$$

Supposons maintenant que T soit stationnaire d'ordre 2. Il existe alors une distribution $K(x)$ à n dimensions agissant sur $\varphi_1 * \check{\varphi}_2$ ou $\check{\varphi}_1 * \varphi_2$ comme $K(x, y)$ sur $\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$:

$$\text{(X,3,3)} \qquad K(x)[\varphi_1 * \check{\varphi}_2] = K(x, y)[\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)]$$

Soit $\chi(u) = \mathcal{F}K(x)$ la transformée de cette distribution $K(x)$. Par définition, $\psi_1(u)$ et $\psi_2(u)$ étant les transformées de $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$, et compte tenu de la propriété des produits de convolution et des transposées :

$$\mathcal{F}\varphi_1 * \check{\varphi}_2 = \psi_1(u)\psi_2(-u) = \psi_1\check{\psi}_2$$

on obtient l'égalité :

$$\chi(u)[\psi_1\check{\psi}_2] = K(x)[\varphi_1 * \check{\varphi}_2] \tag{X,3,4}$$

Il suffit alors de comparer (X,3,1), (X,3,3) et (X,3,4) pour obtenir :

$$\chi(u, v)[\psi_1(u)\,\psi_2(v)] = \chi(u)[\psi_1(u)\,\psi_2(-u)]. \tag{X,3,5}$$

Ainsi, la distribution de covariance $\chi(u, v)$ à $2n$ dimensions de la distribution aléatoire $\tau = \mathcal{F}T$ se met sous la forme :

$$\chi(u, v) = \delta(u + v)\chi(u) \tag{X,3,6}$$

la distribution $\chi(u)$ étant transformée de Fourier de la covariance $K(x)$ de la distribution T aléatoire stationnaire d'ordre 2. Il suffit de comparer avec (X,2,8) pour constater que $\chi(u, -v)$ est la covariance d'une distribution aléatoire à accroissements sans corrélation. La distribution τ elle-même — à cause de ce changement de v en $-v$ — n'est cependant pas elle-même, à strictement parler, à accroissements sans corrélation. Pour examiner ses propriétés, nous nous limiterons au cas où T et les fonctions de base φ sont réelles. La transformée $\psi = \mathcal{F}\varphi$ d'une fonction φ réelle est de la forme

$$\psi = \psi_S + i\psi_A \tag{X,3,7}$$

où ψ_S est réelle et paire et ψ_A réelle et impaire. Nous ne ferons agir sur $\tau = \mathcal{F}T$ que des fonctions de base de cette forme. La distribution τ elle-même sera décomposée en une partie paire et une partie impaire, soit :

$$\begin{cases} \tau = \tau_S - i\tau_A \\ \tau_S = \dfrac{1}{2}(\tau + \check{\tau}) \\ \tau_A = \dfrac{i}{2}(\tau - \check{\tau}). \end{cases} \tag{X,3,8}$$

On a immédiatement :

$$\begin{cases} \tau_S(\psi) = \tau(\psi_S) = \tau_S(\psi_S) \\ \tau_A(\psi) = -\tau(\psi_A) = i\tau_A(\psi_A). \end{cases} \tag{X,3,9}$$

Ainsi, T étant réelle, τ_S et τ_A sont deux distributions réelles, l'une paire, l'autre impaire, agissant sur des fonctions de bases réelles ψ_S et ψ_A paires et impaires respectivement. Relativement à ces fonctions de base,

τ_S et τ_A sont toutes deux à accroissements sans corrélation. On déduit, en effet, de (X,3,9) et de (X,3,5), les suites d'égalités :

$$E[\tau_S(\psi_S)\,\tau_S(\omega_S)] = E[\tau(\psi_S)\,\tau(\omega_S)] = \chi(u)\,[\psi_S(u)\,\omega_S(u)] = \chi(u)\,[\psi_S\omega_S]$$
$$E[\tau_A(\psi_A)\,\tau_A(\omega_A)] = -E[\tau(\psi_A)\,\tau(\omega_A)] = -\chi(u)\,[\psi_A(u)\,\omega_A(-u)] = \chi(u)\,[\psi_A\omega_A]$$

ψ_S, ω_S et ψ_A, ω_A sont des fonctions de base réelles, paires pour les indices S et impaires pour les indices A. Il suffit de comparer avec (X,2,7) pour voir que τ_S et τ_A sont effectivement à accroissements sans corrélation et qu'elles ont la même densité de variance $\chi(u)$. De plus, elles sont dépourvues de corrélation mutuelle. On a, en effet, en utilisant les mêmes relations, la suite d'égalités :

$$E[\tau_S(\psi)\tau_A(\omega)] = -E[\tau(\psi_S)\tau(\omega_A)] = -\chi(u)[\psi_S(u)\omega_A(-u)] = 0$$

Le résultat final est nul, parce que la distribution paire $\chi(u)$, agissant sur le produit $\psi_S(u)\omega_A(-u)$, qui est une fonction impaire, donne nécessairement 0. Résumons les résultats obtenus :

La transformée de Fourier τ *d'une distribution aléatoire* T *réelle stationnaire d'ordre* 2, *de covariance* $K(x)$ *se met sous la forme*

$$\tau = \tau_S - i\tau_A$$

τ_S *et* τ_A *étant deux distributions réelles, l'une paire et l'autre impaire, agissant respectivement sur des fonctions de base réelles paires et impaires.* τ_S *et* τ_A *sont toutes deux à accroissements, sans corrélation sont dépourvues de corrélation mutuelle, admettent une même densité de variance* $\chi(u)$, *transformée de Fourier de la covariance* $K(x)$ *de T.*

Inversement, on voit qu'il est possible de construire une régionalisation, considérée comme une réalisation d'une distribution stationnaire d'ordre 2 de covariance $K(x)$ donnée à l'avance, en construisant (ce qui est facile, puisque seuls interviennent des tirages au sort indépendants) deux réalisations des distributions paires et impaires τ_S et τ_A indépendantes et à accroissements sans corrélation admettant comme densité de variance χ la transformée de $K(x)$. Il suffit de prendre l'image inverse pour obtenir une réalisation de T, soit, en écriture symbolique :

$$(X,3,10)\quad T(x) = \int \cos 2\pi(ux)\tau_S(u)\,du + \int \sin 2\pi(ux)\tau_A(u)\,du$$

Cette écriture est toujours symbolique, et doit être prise au sens des distributions, puisque τ_S et τ_A ne sont jamais des fonctions ordinaires (T, stationnaire, ne peut pas être sommable).

4. — Régularisation d'une distribution stationnaire à accroissements indépendants.

Si T est une distribution aléatoire quelconque, sa régularisée $\check{\alpha} * T$ par une fonction ou une distribution (non aléatoire) à support borné α

agit, sur une fonction de base φ, selon la relation

$$\check{\alpha} * T(\varphi) = \int \alpha(-x)T(y)\Phi(x+y)\,dx\,dy = T(\alpha * \varphi)$$

$\alpha * \varphi$ est bien une fonction de base, d'après les propriétés de la convolution. On peut donc définir $\check{\alpha} * T$ comme la distribution agissant sur φ de la même manière que T sur $\alpha * \varphi$. En tant que distribution aléatoire, $\check{\alpha} * T$ est définie par sa fonctionnelle caractéristique $C_\alpha(\varphi)$, qui se déduit de la fonctionnelle caractéristique $C(\varphi)$ de T par la relation :

$$(X,4,1) \qquad C_\alpha(\varphi) = C(\alpha * \varphi).$$

Supposons maintenant que T soit stationnaire (ou seulement stationnaire d'ordre 2) et admette une distribution de covariance $K(x)$. Il résulte de (X,4,1) que $\check{\alpha} * T$ est également stationnaire, et admet une distribution K_α de covariance telle que :

$$K_\alpha(\varphi_1 * \check{\varphi}_2) = K(\alpha * \varphi_1 * \check{\alpha} * \check{\varphi}_2) = \alpha * \check{\alpha} * K(\varphi_1 * \check{\varphi}_2).$$

Introduisons le covariogramme transitif (fonction, ou distribution)

$$A = \alpha * \check{\alpha}$$

associé à la régularisante α. On obtient :

$$(X,4,2) \qquad K_\alpha = K * A$$

Ainsi, *les covariances se régularisent par les covariogrammes transitifs des régularisantes.*

Un cas particulier [1] important est celui où T est à la fois *stationnaire et à accroissements indépendants.* Sa covariance $K(x)$, qui est en même temps une densité de variance est alors proportionnelle, comme on le voit facilement, à la mesure de Dirac $\delta(x)$, avec un coefficient de proportionnalité μ^2 obligatoirement positif :

$$(X,4,3) \qquad K(x) = \mu^2\,\delta(x)$$

Alors, d'après (X,4,2), la régularisée $\check{\alpha} * T$ est stationnaire, et a pour covariance la distribution

$$(X,4,4) \qquad K_\alpha = \mu^2 A$$

proportionnelle au covariogramme transitif de la régularisante. Inversement, cette relation permet de construire dès modèles de régionalisation, qui puissent être considérés comme des réalisations d'une fonction ou d'une

[1] Ce cas correspond, dans notre terminologie, à un effet de pépite à l'état pur.

distribution aléatoire de covariance $\mu^2 A$ imposée à l'avance. Si l'on sait trouver une solution α de l'équation

$$\alpha * \check{\alpha} = A$$

(ce qui est toujours possible à l'aide d'une transformation de Fourier, car on a, par exemple $\alpha = \bar{\mathcal{F}}\sqrt{\mathcal{F}A}$), il suffit de régulariser par α une distribution à accroissements indépendants et densité de variance constante μ^2. En particulier, si l'on prend une mesure à accroissements indépendants et une densité de variance unité, les quantités de métal contenues dans des volumes V de covariogramme géométrique $K(h)$ constituent une réalisation d'une fonction aléatoire de covariance $K(h)$ identique au covariogramme géométrique de V. En prenant les quantités de métal contenues dans des sphères de diamètre unité, on obtient comme covariance la fonction, définie en (II,5,1), qui représente le volume de l'intersection de deux sphères de diamètre unité dont les centres sont distants de r :

$$K_n(r) = \frac{2^{-n}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} - r\frac{2^{1-n}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)} F\left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, r^2\right]$$

Lois de répartition. — La relation (X,4,1) permet de déterminer les lois de répartitions des fonctions aléatoires ainsi obtenues, et non pas seulement leur covariance. Cette possibilité est parfois utile dans les applications.

Limitons-nous au cas où T est une mesure aléatoire stationnaire à accroissements indépendants et à densité de variance constante μ^2. La quantité de métal

$$q(\varphi) = \int_v dT = T(k)$$

contenue dans un volume φ de variable géométrique $k(x)$ a, d'après (X,2,10), la variance :

$$D^2(q) = \mu^2 \int k(x)\, dx = \mu^2 \varphi$$

c'est-à-dire une variance proportionnelle à φ. En ce qui concerne la fonction de répartition de la variable aléatoire $q(\varphi)$, on peut voir, en premier lieu, qu'elle ne dépend que de la mesure du volume φ, et non pas de sa forme. On peut, en effet, avec une approximation aussi bonne que l'on veut, considérer φ comme la réunion d'un nombre k très grand de petits parrallélépipèdes jointifs $\Delta\varphi_i$ tous égaux. Les quantités de métal $q(\Delta\varphi_i)$ sont des variables aléatoires indépendantes, ayant même loi de probabilité, dont la somme $\sum_{i=1}^{k} q(\Delta\varphi_i)$ converge vers $q(\varphi)$ lorsque k augmente indéfiniment (au sens de la convergence des lois de probabilité) d'après la condition

de continuité posée dans la définition des mesures aléatoires. Comme la loi d'une somme $\Sigma q(\Delta\varphi_i)$ ne dépend que du nombre des $\Delta\varphi_i$, et non de leur disposition mutuelle, on voit, par passage à la limite, que la loi de $q(\varphi)$ ne dépend que de la mesure de φ et non pas de sa forme.

En deuxième lieu, cette loi *est indéfiniment divisible*, puisque, si l'on partage φ en volumes jointifs $\Delta\varphi_i$ de même mesure $\frac{\varphi}{k}$ (mais de formes éventuellement différentes), on a :

$$q(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} q(\Delta\varphi_i) \qquad \text{(X,4,6)}$$

c'est-à-dire que $q(\varphi)$ peut être mise sous la forme d'une somme d'un nombre quelconque k de variables indépendantes ayant même loi de répartition (puisque les $\Delta\varphi_i$ ont mêmt mesure). Si $\Phi(u)$ est la fonction caractéristique de la loi de $q(\varphi)$ $[\Phi(u)]^{\frac{1}{k}}$ est donc aussi, — quel que soit k — une fonction caractéristique.

Lorsque la variance est finie, ce qui est ici le cas d'après (X,4,5), un théorème classique permet de préciser la nature de $\Phi(u)$: on montre en effet que, pour qu'une fonction $\Phi(u)$ soit fonction caractéristique d'une loi indéfiniment divisible, de variance finie, il faut, et il suffit, que son logarithme se mette sous la forme :

$$\log \Phi(u) = ium + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iut} - 1 - iut}{t^2}\, d\mathrm{G}(t) \qquad \text{(X,4,7)}$$

G étant une mesure sommable, dont la sómme est égale à la variance de la loi $\Phi(u)$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathrm{G}(t). \qquad \text{(X,4,8)}$$

Mais le même résultat s'applique aux $q(\Delta\varphi_i)$ de la décomposition (X,4,6). Soient $\Phi_k(u)$ leur fonction caractéristique. On a, précisément parce que la loi est indéfiniment divisible

$$\log \Phi(u) = k \log \Phi_k(u) = \frac{\varphi}{\Delta\varphi_i} \log \Phi_k(u).$$

Par suite les logarithmes des fonctions caractéristiques des quantités de métal de deux volumes quelconques φ et φ' sont proportionnelles aux volumes φ et φ'. Prenons, au lieu de G, une mesure positive sommable, de somme 1, soit H, (X,4,7) prend la forme

$$\log \Phi(u) = \varphi \left[ium + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iut} - 1 - iut}{t^2}\, d\mathrm{H}(t) \right] \qquad \text{(X,4,8) bis}$$

et, sous cette forme, l'équation (X,4,8) *bis* s'applique à la fonction

caractéristique $\Phi(u)$ de la quantité de métal $q(\rho)$ relative à un volume ρ quelconque. La loi élémentaire $\psi(u)$ relative au volume unité

$$\text{(X,4,9)} \qquad \log \psi(u) = ium + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iut} - 1 - iut}{t^2} \, dH(t)$$

permet d'obtenir toutes les lois Φ sous la forme

$$\text{(X,4,10)} \qquad \log \Phi(u) = \rho \log \psi(u).$$

Au lieu d'une simple quantité de métal, introduisons maintenant une fonction de pondération (borélienne) p, et cherchons la loi de la variable aléatoire $T(p)$. Découpons le support, supposé fini, de p en volumes $\Delta\rho_i$ très petits, de fonction caractéristique $k_i(x)$, et considérons la fonction

$$\varphi(x) = \sum_i k_i(x) p(x_i)$$

le point x_i appartenant à $\Delta\rho_i$. Si l'on augmente indéfiniment le nombre des $\Delta\rho_i$, chacun d'eux tendant vers 0, $\varphi(x)$ converge vers $p(x)$ et, comme T est une mesure, $T(\varphi)$ converge vers $T(p)$. Mais on a aussi :

$$T(\varphi) = \sum_i p(x_i) T(k_i)$$

les $T(k_i)$ sont des variables indépendantes, dont les lois sont donnés par (X,4,10). Par suite, $T(\varphi)$ admet la fonction caractéristique $\Phi(U)$ définie par :

$$\text{(X,4,11)} \qquad \log \Phi(u) = \sum_i \Delta\rho_i \log \psi[up(x_i)]$$

Lorsque l'on fait tendre les $\Delta\rho$ vers 0, la loi de $T(\varphi)$ tend vers la loi de $T(p)$, d'après la condition de continuité, et cette loi s'obtient en prenant la limite de (X,4,11), qui est l'intégrale

$$\text{(X,4,11)} \qquad \log \Phi(u) = \int \log \psi[up(x)] \, dx$$

En faisant $u = 1$, et en remplaçant $p(x)$ par $\varphi(x)$, fonction de base quelconque (borélienne, à support borné), on obtient la *fonctionnelle caractéristique* $C(\varphi)$ de T :

$$\text{(X,4,12)} \qquad \log C(\varphi) = \int \log \psi[\varphi(x)] \, dx$$

Enfin, revenant à (X,4,1), nous obtenons, pour la régularisée $\check{\alpha} * T$, dont nous savons déjà qu'elle admet la covariance $\mu^2 A$, la fonctionnelle caractéristique

$$\text{(X,4,12)} \qquad \log C_\alpha(\varphi) = \int \log \psi[\alpha * \Phi] \, dx$$

de sorte que la régularisée $\check{\alpha} * T$ est parfaitement définie en tant que fonction ou distribution aléatoire.

Les moments. — Il est rarement possible d'expliciter (X,4,12), même si $\log \psi$ est une fonction simple. Mais il est possible, en général, de déterminer les moments, s'ils existent, à partir des cumulants, ou semi-invariants χ_n de la loi ψ :

$$\log \psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \frac{(iu)^n}{n!} \tag{X,4,13}$$

Si les cumulants χ_n sont connus, (X,4,12) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \log C(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\varphi) \dfrac{i^n}{n!} \\ C_n(\varphi) = \chi_n \int (\alpha * \varphi)^n \, dx \end{cases} \tag{X,4,14}$$

Ainsi, la loi de répartition simultanée de p prélèvements $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_p$ s'obtient en remplaçant φ par $\sum_{j=1}^{p} u_j \varphi_j$, d'où :

$$\log C[\Sigma u_i \varphi_i] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} C_n\left(\sum_{j=1}^{p} u_j \varphi_j \right).$$

Cette relation permet le calcul des moments successifs. Pour avoir, par exemple, la covariance des prélèvements φ_j et φ_l, on doit prendre le terme en $u_j u_l$ du cumulant d'ordre 2

$$C_2(\Sigma u_j \varphi_j) = \chi_2 \int \sum_{jl} u_j u_l (\alpha * \varphi_j)(\alpha * \varphi_l) \, dx$$

Ici, $\chi_2 = \mu^2$, d'après (X,4,9), et on retrouve bien :

$$E[T(\alpha * \varphi_j) T(\alpha * \varphi_l)] = \mu^2 \int (\alpha * \varphi_j)(\alpha * \varphi_l) \, dx = \mu^2 A(\varphi_j * \check{\varphi}_l)$$

EXEMPLES. — Prenons, pour régulariser la mesure à accroissements indépendants, la fonction caractéristique (ensembliste) ou variable géométrique k d'un volume V, de covariogramme $k * \check{k} = K$, et prenons deux prélèvements ponctuels $\varphi_1 = \delta(x)$ et $\varphi_2 = \delta(x - h)$ distants de h. Ces deux prélèvements ont une fonction caractéristique $\Phi(u, v)$ qui se déduit immédiatement de (X,4,12).

$$\log \Phi(u, v) = \int \log \psi[uk(x) + vk(x - h)] \, dx.$$

Comme $k(x)$ est une variable géométrique, on a $k(x) = k(x - h) = 1$ dans un volume de mesure $K(h)$, et $k(x) = 1$, $k(x - h) = 0$ (ou $k(x) = 0$,

et $k(x - h) = 1$) dans un volume $K(0) - K(h)$. D'où le résultat :

$$(X,4,15) \quad \log \Phi(u, v) = K(h) \log \psi(u + v) + [K(0) - K(h)][\log \psi(u) + \log \psi(v)].$$

Soient X et Y les deux variables aléatoires correspondantes. Elles se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} X = X_1 + Z \\ Y = Y_1 + Z \end{cases}$$

les trois variables $X_1 Y_1$ et Z étant indépendantes, et obéissant les deux premières à la loi $[K(0) - K(h)] \log \psi(u)$ et la dernière à la loi $K(h) \log \psi(u)$. A Y fixé, X est la somme de deux variables indépendantes : X_1, obéissant toujours à la loi $[K(0) - K(h) \log \psi(u)$, et Z, obéissant à la loi de Z à Y fixé. Si les lois de $X_1 Y_1$ et Z admettent des densités de fréquence $f_1(x_1)$, $f_1(y_1)$, et $f_2(z)$, la loi de z à y fixé a la densité de fréquence $\dfrac{f_2(z) f_1(y - z)}{f(y)}$.

Par exemple, prenons, comme loi élémentaire, une loi gamma :

$$\log \psi(u) = -\alpha \log \left[1 - i \frac{u}{\beta}\right]$$

et posons :

$$\begin{cases} \alpha_1 = [K(0) - K(h)]\, \alpha \\ \alpha_2 = K(h)\, \alpha. \end{cases}$$

On trouve :

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta x} \\ f_2(z) = \dfrac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} z^{\alpha_2 - 1} e^{-\beta z} \\ f(y) = f_1 * f_2 = \dfrac{\beta^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} y^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} e^{-\beta y}. \end{cases}$$

A Y fixé, X est somme d'une variable X_1 obéissant à la loi gamma $f_1(x)$, et d'une variable Z indépendante de la précédente, obéissant à la loi :

$$\frac{f_2(z) f_1(y - z)}{f(y)} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\, \Gamma(\alpha_2)} \left[1 - \frac{z}{y}\right]^{\alpha_1 - 1} \left[\frac{z}{y}\right]^{\alpha_2 - 1} \frac{1}{y}.$$

Autrement dit, pour $Y = y$ fixé, $\dfrac{Z}{y}$ obéit à la loi bêta de paramètres (α_1 et α_2).

On vérifiera que la courbe de régression $E[X|Y = y]$ est une droite. Par contre, la variance liée est une fonction croissante de y. En introduisant la moyenne m, la variance σ^2 et le coefficient de corrélation ρ de X et Y, on trouve :

$$\begin{cases} E(X|y) = (1 - \rho) m + \rho y \\ D^2(x|y) = \sigma^2 (1 - \rho) \left[1 + \dfrac{\rho y^2}{\sigma^2 + m^2}\right]. \end{cases}$$

5. — Dérivation des distributions aléatoires.

On sait qu'une distribution T quelconque est indéfiniment dérivable, et que ses dérivées successives sont des distributions. Une dérivée d'ordre $p = p_1 + \cdots + p_n$ sera désignée par le symbole abrégé D^p

$$D^p = \frac{\partial^p}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}}.$$

Dans cette notation $p = (p_1, p_2 \ldots p_n)$ représente, en réalité, un système d'entier $(p_1, p_2 \ldots p_n)$. La dérivée D^pT est définie par la relation :

$$(X,5,1) \qquad D^pT(\varphi) = (-1)^pT(D^p\varphi)$$

φ étant une fonction de base quelconque. On notera, de plus, que si T est une distribution tempérée, il en est de toutes ses dérivées (car, si φ appartient à $\mathcal{S}$, il en est de même de toutes ses dérivées).

Supposons, maintenant que T soit une distribution aléatoire, définie par sa fonctionnelle caractéristique $C(\varphi)$. Il est immédiat, à partir de (X,5,1), de définir la dérivée D^pT de T en tant que distribution aléatoire par sa fonctionnelle caractéristique $C_p(\varphi)$, donnée par :

$$(X,5,2) \qquad C_p(\varphi) = C[(-1)^pD^p\varphi).$$

Ainsi, les *distributions aléatoires sont indéfiniment dérivables, et leurs dérivées successives sont des distributions aléatoires* (toutes tempérées, dans le cas d'une distribution aléatoire tempérée). On peut, du reste, interpréter la dérivation D^pT comme le produit de convolution de T par la dérivée $D^p\delta$ de la mesure de Dirac.

$$D^pT = D^p\delta * T$$

La dérivation apparaît comme une régularisation par la transposée α de $D^p\delta$, soit :

$$\alpha = (-1)^pD^p\delta$$

et (X,5,2) est ainsi un simple cas particulier de (X,4,1).

Moments de la dérivée D^pT. — Le moment d'ordre k d'une distribution aléatoire T, lorsqu'il existe, est la distribution M_k de l'espace à $k\eta$ dimensions, définie, selon (X,1,7), par la relation :

$$M_k[\varphi_1(x_1) \ldots \varphi_k(x_k)] = E[T(\varphi_1) \ldots T(\varphi_k)]$$

où les $\varphi_1\varphi_2 \ldots$ sont des fonctions de base quelconque, et $x_1 \ldots x_k$ des points de k espaces distincts à n dimensions, dans le produit topologique desquels M_k est définie. Désignons alors par $M_k^{(p)}$ le moment d'ordre k de la distribution aléatoire dérivée D^pT. De la définition (X,5,2) découle immédiatement :

$$M_k^{(p)}[\varphi_1(x_1) \ldots \varphi_k(x_k)] = E[D^pT(\varphi_1) \ldots D^pT(\varphi_k)]$$
$$= (-1)^{kp}E[T(D^p\varphi_1) \ldots T(D^p\varphi_k)].$$

Par suite, on a :

$$M_k^{(p)}[\varphi_1(x_1) \dots \varphi_k(x_k)] = (-1)^{kp} M_k[D^p\varphi_1(x_1) \dots D^p\varphi_k(x_k)]$$

Mais le produit $D^p\varphi_1(x_1) \dots D^p\varphi_k(x_k)$ est, dans l'espace à kn dimensions, la dérivée $D^p(x_1)D^p(x_2) \dots D^p(x_k)$ d'ordre kp de la fonction $\varphi_1(x_1) \dots \varphi_k(x_k)$. Par suite $M_k^{(p)}$ est, dans cet espace, dérivée d'ordre kp de M_k :

$$M_k^{(p)} = D^p(x_1)\, D^p(x_2) \dots D^p(x_k) M_k. \qquad (X,5,3)$$

En particulier, le moment d'ordre 1 de la dérivée est égal à la dérivée du moment d'ordre 1

$$M_1^{(p)} = D^p M_1 \qquad (X,5,4)$$

et la covariance $K^{(p)}(x, y)$ de la dérivée est la dérivée d'ordre $2p$ de la covariance $K(xy)$, obtenue en dérivant p fois en x et p fois en y :

$$K^{(p)}(x, y) = D^p(x)\, D^p(y) K(x, y). \qquad (X,5,5)$$

Cas stationnaire d'ordre 2. — Dans le cas stationnaire d'ordre 2, il existe une distribution de covariance $K(x)$ de l'espace à n dimensions, définie, comme nous l'avons vu, par :

$$K(x)[\varphi_1 * \check{\varphi}_2] = K(x, y)\, [\varphi_1(x)\, \varphi_2(y)]. \qquad (X,5,6)$$

La covariance $K^{(p)}(xy)$ de la dérivée D^pT, d'après sa définition (X,5,5) et compte tenu de (X,5,6), agit sur la fonction $\varphi_1(x)\, \varphi_2(y)$ de la manière suivante :

$$K^{(p)}(xy)\, [\varphi_1(x)\, \varphi_2(y)] = K(x, y)\, [D^p\varphi_1(x)\, D^p\varphi_2(y)] = K(x)\, [D^p\varphi_1 * (D^p\dot{\varphi}_2)^{\vee}].$$

Mais la transposée $(D^p\varphi_2)^{\vee}$ d'une dérivée est égale, au signe près, à la dérivée de la transposée

$$(D^p\varphi_2)^{\vee} = (-1)^p D^p\check{\varphi}_2$$

il vient ainsi :

$$K^{(p)}(xy)\, [\varphi_1(x)\, \varphi_2(y)] = (-1)^p\, K(x)\, [D^p\varphi_1 * D^p\check{\varphi}_2] = (-1)^p\, (D^p)^2\, K(x)\, [\varphi_1 * \check{\varphi}_2].$$

D'où le résultat : *la dérivée* D^pT *d'une distribution* T *stationnaire d'ordre* 2, *de covariance* $K(x)$ *est elle-même stationnaire d'ordre* 2, *et a comme covariance* $K^{(p)}(x)$ *au signe près la dérivée d'ordre* $2p$ *de* $K(x)$, *soit* :

$$K^{(p)}(x) = (-1)^p\, (D^p)^2\, K(x). \qquad (X,5,6)$$

Par exemple, une dérivée première dans la direction $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial T}{\partial x_n} \qquad (X,5,7)$$

a pour covariance :

$$K_\alpha(x) = -\frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2} = -\left[\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^2 K. \qquad (X,5,8)$$

Ces résultats généralisent exactement ceux que l'on obtient dans la théorie des fonctions aléatoires. Mais, pour les fonctions aléatoires, la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivation (X,5,7) soit possible (au sens de la dérivation en moyenne quadratique), est que la dérivée $\frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2}$ existe au sens usuel, et soit une fonction, la covariance K_α de la dérivée étant alors donnée par (X,5,8). Les distributions aléatoires, au contraire, sont toujours dérivables, et même indéfiniment dérivables, de sorte que (X,5,7) a toujours un sens : corrélativement, la dérivation de $K(x)$ effectuée en (X,5,8) est, naturellement, prise au sens des distributions, et $K_\alpha(x)$ est elle-même une distribution.

6. — La théorie intrinsèque pour les distributions.

Au paragraphe 1, nous avons défini les distributions aléatoires T sur un espace $\mathcal{E}$ de fonctions de base φ. Mais il peut arriver que les lois $F[T(\varphi_i)]$, ou la fonctionnelle caractéristique $C(\varphi)$, et particulièrement leurs moments d'ordre 1 et 2, ne soient pas définis pour toutes les fonctions φ de $\mathcal{E}$, mais seulement pour des fonctions appartenant à un sous espace de $\mathcal{E}$. Nous nous intéresserons exclusivement au sous-espace $\mathcal{E}^0$ des fonctions φ de $\mathcal{E}$ de somme nulle, c'est-à-dire vérifiant :

$$\text{(X,6,1)} \qquad \int \varphi(x)\, dx = 0.$$

Les distributions ainsi définies sur $\mathcal{E}^0$ ne correspondent pas, de manière univoque, à des distributions de $\mathcal{E}'$. A chaque distribution définie sur $\mathcal{E}^0$ correspond une classe de distributions de $\mathcal{E}'$, qui se déduisent les unes des autres par addition d'une constante arbitraire. En effet, dans la transformation de Fourier, les fonctions de base de $\mathcal{S}^0$, c'est-à-dire les fonctions de $\mathcal{S}$ vérifiant (X,6,1) deviennent des fonctions ψ de $\mathcal{S}_0$, c'est-à-dire des fonctions de $\mathcal{S}$ vérifiant

$$\psi(0) = 0.$$

Alors, la transformée $\tau = \mathcal{F}T$, définie sur $\mathcal{S}_0$, ne se prolonge sur $\mathcal{S}$ qu'à l'arbitraire d'une mesure de Dirac $A\delta(x)$, A constante quelconque. Par réciprocité, T définie sur $\mathcal{E}^0$ ne peut se prolonger sur $\mathcal{S}$ (et sur $\mathcal{E}$) qu'à une constante A près.

Nous dirons qu'une distribution aléatoire obéit à un schéma intrinsèque si elle est définie sur un espace $\mathcal{E}^0$ et si elle est stationnaire (ou stationnaire d'ordre 2). Autrement dit, pour toute fonction de base φ de somme nulle, la fonctionnelle caractéristique $C(\varphi)$ est définie, et vérifie

$$\text{(X,6,2)} \qquad C[\varphi(x+h)] = C[\varphi(x)]$$

On dira aussi que ces distributions aléatoires intrinsèques sont à *accroissements stationnaires*. Toute fonction φ vérifiant (X,6,1), peut, en effet, se mettre sous la forme de la différence

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

de deux fonctions quelconques de $\mathcal{E}$ admettant la même somme

$$\int \varphi_1 \, dx = \int \varphi_2 \, dx.$$

La quantité de métal $T(\varphi) = T(\varphi_1) - T(\varphi_2)$ peut alors être considérée comme un *accroissement*. Si une régularisée $\overset{\vee}{\alpha} * T = T_\alpha(x)$ est une fonction continue, elle peut agir sur la mesure de Dirac $\varphi = \delta(x-a) - \delta(x-b)$ et on a :

$$T_\alpha(\varphi) = T_\alpha(a) - T_\alpha(b)$$

et il s'agit bien, dans ce cas particulier, de l'accroissement de la fonction $T_\alpha(x)$ entre les points b et a. Seule la différence des valeurs en b et a est ainsi définie. Les valeurs ponctuelles de $T_\alpha(x)$ ne sont connues qu'à une constante près, comme T elle-même.

Naturellement, la raison majeure de cette restriction aux fonctions de base de somme nulle, ou espace $\mathcal{E}^0$ des accroissements, est de permettre l'étude de phénomènes dont les variances a priori seraient infinies, mais dont les accroissements conservent des variances finies. Dans le cas d'une fonction aléatoire, nous avons vu que cette circonstance se présente effectivement lorsque le $\gamma(h)$ est indéfiniment croissant pour $|h| \to \infty$.

Dérivées d'une distribution aléatoire intrinsèque. — Une distribution aléatoire intrinsèque T n'est définie sur $\mathcal{E}$ qu'à une constante arbitraire près, mais ses dérivées successives, et notamment ses dérivées premières sont définies sans ambiguïté pour toute fonction de base φ, de somme quelconque, et sont donc des distributions de $\mathcal{E}'$. En effet, une dérivée première DT, par définition, agit sur une fonction de base φ quelconque selon la formule

$$\text{(X,6,3)} \qquad DT(\varphi) = -T(D\varphi).$$

Mais la dérivée $D\varphi$ d'une fonction de base a toujours une somme nulle, comme on le voit en intégrant par parties

$$\int D\varphi \, dx = 0$$

de sorte que $D\varphi$ est une fonction de $\mathcal{E}^0$. Ainsi, pour une fonction de base φ quelconque, la distribution aléatoire stationnaire DT est définie par sa fonctionnelle caractéristique $C'(\varphi)$:

$$\text{(X,6,4)} \qquad C'(\varphi) = C(-D\varphi).$$

Cette remarque va faciliter l'étude des moments de T.

***Moments d'ordre* 1.** — Le moment M d'ordre 1 se définit exactement comme au premier paragraphe. C'est une distribution de l'espace à n dimensions telle que

$$M(\varphi) = E[T(\varphi)]$$

pour toute fonction de base φ de somme nulle. De (X,6,2), on déduit évidemment :

$$M[\varphi(x + h)] = M[\varphi(x)] \qquad \text{(X,6,5)}$$

mais on ne peut pas en conclure que M est une constante, car cette relation n'est vraie que pour les fonctions φ de somme nulle. Par contre, une dérivée première DT, dont le moment d'ordre 1 est DM, est définie pour toutes les fonctions φ. Le caractère stationnaire de DT entraîne que DM est une constante, de sorte que le moment d'ordre 1, dont toutes les dérivées premières sont des constantes, est obligatoirement une forme linéaire, d'ailleurs définie à une constante près seulement.

$$M(x) = (ax) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n. \qquad \text{(X,6,6)}$$

Inversement, si M est de la forme (X,6,6), on vérifie immédiatement que la condition (X,6,5) est satisfaite pour toute fonction φ de somme nulle :

$$\int M(x)\,\varphi(x + h)\,dx = \int M(x - h)\,\varphi(x)\,dx$$
$$= \int M(x)\,\varphi(x)\,dx - (ah)\int \varphi(x)\,dx.$$

Ainsi, le moment d'ordre 1 est un gradient constant et caractérise une *dérive linéaire*. En remplaçant, le cas échant, T par $T - M(x)$, nous supposerons dans toute la suite que ce dernier moment est identiquement nul

$$M = 0. \qquad \text{(X,6,7)}$$

Il n'en résulte, d'ailleurs, que $E[T(\varphi)]$ n'est nulle que pour les fonctions φ de somme nulle. Pour une fonction de base quelconque, cette espérance mathématique ne peut être déterminée qu'à une expression près, de la forme $\lambda \int \varphi\,dx$, où λ est une constante arbitraire.

***Moments d'ordre* 2.** — La covariance K se définit exactement comme dans le premier paragraphe. En vertu du caractère stationnaire, c'est une distribution $K(x)$ de l'espace à n dimensions, agissant sur les produits de convolution $\varphi_1 * \check{\varphi}_2$ de fonctions de base φ_1 et φ_2 de somme nulle selon la formule :

$$K[\varphi_1 * \check{\varphi}_2] = E[T(\varphi_1)\,T(\varphi_2)]. \qquad \text{(X,6,8)}$$

En particulier, la variance de la variable aléatoire $T(\varphi)$ est égale à :

$$D^2[T(\varphi)] = K[\varphi * \check{\varphi}] \geqslant 0. \qquad \text{(X,6,9)}$$

Cette expression doit être obligatoirement positive pour toute fonction φ de somme nulle, mais non pas pour une fonction de base φ quelconque. La distribution K n'est pas, par conséquent, nécessairement de type positif. Nous dirons que K doit *être de type positif conditionnel*, entendant par là que l'inégalité (X,6,9) doit être vérifiée seulement pour les fonctions φ de somme nulle.

Cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que $K(x)$ soit de type positif conditionnel. Nous savons qu'une dérivée première $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$, définie sur les fonctions de base de somme quelconque, est elle-même stationnaire d'ordre 2, et a comme covariance la distribution K_α définie en (X,5,8), soit

$$K_\alpha(x) = -\frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2} \qquad \text{(X,6,10)}$$

Comme $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$ agit sur toutes les fonctions de base, $K_\alpha(x)$ doit être nécessairement de type positif, et le théorème de Bochner nous montre qu'il faut, et qu'il suffit pour cela que sa transformée de Fourier $\mathcal{F}K_\alpha$ soit une mesure positive. Si $\mathcal{F}K$ désigne la transformée de la covariance $K(x)$ de T, on déduit de (X,6,10) et de la formule (A,8,8) de l'Annexe A

$$\mathcal{F}K_\alpha = 4\pi^2(\alpha u)^2 \mathcal{F}K = 4\pi^2(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n)^2 \mathcal{F}K \qquad \text{(X,6,11)}$$

Ainsi, pour que K soit de type positif conditionnel, il est nécessaire que le produit de sa transformée de Fourier par le carré d'une forme linéaire (αu) quelconque soit une mesure positive.

Plus généralement, comme toute forme quadratique $Q(u)$ définie positive est une somme de carrés de formes linéaires, il faut que le produit de $\mathcal{F}K$ par toute forme quadratique définie positive soit une mesure positive. Cette condition nécessaire est aussi suffisante. Posons, en effet :

$$\begin{cases} \chi = \mathcal{F}K \\ \psi = \mathcal{F}\varphi. \end{cases}$$

La condition (X,6,9) est équivalente à la suivante :

$$\chi[|\psi|^2] \geqslant 0. \qquad \text{(X,6,12)}$$

Si φ est de somme nulle, ψ est nulle à l'origine

$$\psi(0) = 0$$

et le carré $|\psi|^2$, fonction de base indéfiniment dérivable, admet, au voisinage de l'origine, un développement commençant par des termes du deuxième degré. Prenons une forme quadratique définie positive, par exemple :

$$\rho^2 = u_1^2 + \cdots + u_n^2$$

La fonction $\frac{1}{\rho^2}|\psi(u)|^2$ est borélienne et positive. Par suite, $\rho^2\chi$, qui est,

par hypothèse, une mesure positive, agit sur cette fonction, et l'on a bien :

$$\rho^2 \chi\left[\frac{|\psi|^2}{\rho^2}\right] = \chi[|\psi|^2] \geqslant 0$$

de sorte que (X,6,12) est vérifiée pour toute fonction de base ψ nulle à l'origine, et par suite aussi (X,6,9) pour toute fonction de base φ de somme nulle. D'où le résultat cherché :

« *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une distribution* K *soit de type positif conditionnel est que le produit de sa transformée de Fourier* χ *par une forme quadratique définie positive quelconque soit une mesure positive* ».

Exemple. — La distribution r^λ a pour transformée de Fourier, dans l'espace à n dimensions,

$$\mathcal{F}_n r^\lambda = \pi^{-\lambda-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \rho^{-\lambda-n}.$$

Or pour que le produit de $\rho^{-\lambda-n}$ par une forme quadratique définie positive soit une mesure positive, il faut, et il suffit que l'on ait

$$2 - \lambda - n > -n,$$

c'est-à-dire :

(X,6,13) $$\lambda < 2.$$

Ainsi, A étant une constante ayant le signe de $\dfrac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}$, la distribution Ar^λ est de type conditionnel, pourvu que λ soit inférieur à 2, et peut jouer le rôle de covariance d'un schéma intrinsèque. En particulier, pour $0 < \lambda < 2$, la fonction $-r^\lambda$ est de type positif conditionnel.

De même, encore, la fonction $\log\frac{1}{r}$ a pour transformée de Fourier

$$\mathcal{F}_n \log\frac{1}{r} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\pi^{-\frac{n}{2}}}{2} \frac{1}{\rho^n} + B\delta.$$

Comme le produit de la mesure de Dirac par une forme quadratique définie positive Q est identiquement nul, et que le produit de $\frac{1}{\rho^n}$ par Q est une mesure positive, $\log\frac{1}{r}$ est toujours de type positif conditionnel.

Fonction de dispersion intrinsèque. — Lorsque $K(x)$ est une fonction (de type conditionnel positif), elle agit sur les mesures de Dirac. Prenons

$$\varphi(x) = \delta(x - y - h) - \delta(x - y).$$

L'accroissement $T(\varphi) = T(y+h) - T(y)$ a pour variance :

$$K[\varphi * \check{\varphi}] = K[2\delta(x) - \delta(x-h) - \delta(x+h)] = 2\,K(0) - 2K(h).$$

D'où la relation entre covariance et fonction de dispersion intrinsèque :

$$\text{(X,6,14)} \qquad \gamma(h) = K(0) - K(h)$$

D'ailleurs, $K(h)$ n'est déterminée qu'à une constante près, et il est toujours loisible de prendre $K(0) = 0$. On retrouve ainsi le résultat du paragraphe (VIII,2) : une fonction intrinsèque $\gamma(h)$ doit être telle que $-\gamma(h)$ soit de type positif conditionnel. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que toutes les dérivées secondes $\frac{\partial^2\gamma}{\partial\alpha^2}$ prises, au sens des distributions, dans une direction α quelconque soient de type positif, ou encore que le produit de $\mathcal{F}\gamma$ par une forme quadratique définie positive quelconque soit une mesure positive. En particulier, $\log r$ et r^λ pour $\lambda < 2$ vérifient les conditions requises pour être des fonctions intrinsèques.

Variances d'extension. — Soient deux fonctions de base φ_1 et φ_2 de somme unité :

$$\int \varphi_1\,dx = \int \varphi_2\,dx = 1.$$

La différence $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ est une fonction de base de somme nulle. Par définition, nous appellerons variance d'extention de $T(\varphi_1)$ et $T(\varphi_2)$ la variance de $T(\varphi)$:

$$D^2[T(\varphi)] = D^2[T(\varphi_1) - T(\varphi_2)]$$

D'après (X,6,9), cette variance d'extension est donnée par la formule générale :

$$\text{(X,6,15)} \quad \begin{cases} D^2[T(\varphi_1) - T(\varphi_2)] = K[(\varphi_1 - \varphi_2) * (\check{\varphi}_1 - \check{\varphi}_2)] \\ \qquad\qquad = K[\varphi_1 * \check{\varphi}_1 + \varphi_2 * \check{\varphi}_2 - 2\varphi_1 * \check{\varphi}_2] \end{cases}$$

De même, étant données quatre fonctions de base $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4$ de somme unité, on appellera covariance d'extension de $T(\varphi_1) - T(\varphi_2)$ et $T(\varphi_3) - T(\varphi_4)$ la covariance :

(X,6,16)

$$E\{[T(\varphi_1) - T(\varphi_2)][T(\varphi_3) - T(\varphi_4)]\} = K[(\varphi_1 - \varphi_2) * (\check{\varphi}_3 - \check{\varphi}_4)]$$
$$= K[\varphi_1 * \check{\varphi}_3 + \varphi_2 * \check{\varphi}_4 - \varphi_1 * \check{\varphi}_4 - \varphi_2 * \check{\varphi}_3]$$

Compte tenu de la relation (X,6,14) entre la covariance K et la fonction intrinsèque $\gamma(h)$, le lecteur vérifiera sans peine que les différentes formules

du paragraphe (VIII-3) ne sont que des cas particuliers de (X,6,15) et (X,6,16). Par exemple, prenons :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=p} \delta(x - x_i) \\ \varphi_2(x) = \dfrac{1}{V} k(x) \end{cases}$$

$k(x)$ étant la variable géométrique associée à un volume V. On suppose que $K(x) = -\gamma(x)$ est une fonction, et agit par conséquent sur les mesures de Dirac et sur $k(x)$. (X,6,15) donne immédiatement :

$$D^2[T(\varphi_1) - T(\varphi_2)] = \frac{2}{pV} \sum_i \int_V \gamma(x - x_i)\, dx - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x')\, dx\, dx' - \frac{1}{p^2} \sum_{ij} \gamma(x_i - x_j).$$

On reconnaît sans peine la formule (VIII,3,12). De même, encore, prenant

$$\begin{cases} \varphi_1 = \delta(x - x_j) \\ \varphi_2 = \delta(x - x_i) \\ \varphi_3 = \delta(x - x_l) \\ \varphi_4 = \delta(x - x_k) \end{cases}$$

la formule (X,6,16) donne, en notation d'accroissements :

$$E(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}) = \gamma(x_i - x_l) + \gamma(x_j - x_k) - \gamma(x_i - x_k) - \gamma(x_j - x_l)$$

ce qui n'est pas autre chose que la formule de base (VIII,1,9).

Effet de Pépite. — Par définition, nous dirons qu'il y a effet de pépite lorsque la distribution de covariance est de la forme :

(X,6,17) $$K(x) = C\delta(x) - \gamma(x)$$

$-\gamma(x)$ étant une fonction continue de type conditionnel positif, c'est-à-dire une fonction intrinsèque, $\delta(x)$ représentant la mesure de Dirac, et C étant une constante appelée constante de pépite. Toute régularisée $T * \check{\alpha}$ par une fonction de pondération α de covariogramme $A = \alpha * \check{\alpha}$ admet le demi-covariogramme

(X,6,18) $$\gamma_\alpha(h) = -CA(h) + \gamma * A - B$$

B est une constante telle que $\gamma_\alpha(0) = 0$. Ainsi l'effet de pépite se caractérise par l'apparition d'une composante $CA(h)$ proportionnelle au covariogramme de la régularisante. En particulier, la fonction de prélèvement $\alpha = \dfrac{k(x)}{V}$, où $k(x)$ est la variable géométrique de V, et $A = k * \check{k}$ son covariogramme, donne le terme supplémentaire $-\dfrac{C}{V^2} A(h)$. Ainsi,

la variance d'un échantillon V dans un champ V′ de covariogramme A′ est majorée, par l'effet de pépite, d'un terme additionnel σ_p^2, appelé *variance de pépite*, donné par :

$$\sigma_p^2 = -\frac{C}{V'^2}\int A'(h)\,\delta(h)\,dh + \frac{C}{V^2}\int A(h)\,\delta(h)\,dh = C\left[\frac{A(0)}{V^2} - \frac{A'(0)}{V'^2}\right]$$

soit

$$\sigma_p^2 = \frac{C}{V} - \frac{C}{V'}. \qquad \text{(X,6,19)}$$

Cette variance supplémentaire, inversement proportionnelle aux volumes, traduit la présence d'une composante aléatoire pure : tel est bien, en effet, la signification du terme $C\delta(x)$ de (X,6,17), qui est la covariance d'une mesure aléatoire à accroissements indépendants et densité de variance constante C. En présence d'effet de pépite, la variable régionalisée possède, localement, un comportement aléatoire. Si cet effet est très marqué (si C est grande), on peut avoir, expérimentalement, l'impression que des échantillons de petites tailles v sont indépendants les uns des autres. Naturellement, pour des échantillons plus gros, l'effet de pépite s'amortit rapidement, conformément à (X,6,18) ou (X,6,19) ,et les corrélations régionales, masquées par l'effet de pépite intense des petits échantillons, se manifestent à nouveau.

CHAPITRE XI

LA MONTÉE INTRINSÈQUE SOUS PUISSANCE CONSTANTE

SOMMAIRE

A l'exception du premier paragraphe, ce chapitre est de lecture ingrate. Mais il n'est pas nécessaire de suivre le détail de tous les calculs. Les résultats obtenus sont donnés à titre de référence et en vue des applications pratiques. Néanmoins, on notera, d'un point de vue théorique, que la montée sous puissance constante l possède à courte distance *($r < l$) les mêmes caractères régularisateurs que la montée transitive* $\left[\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right) r^{\lambda}$ *donne ici* $\frac{\sqrt{\pi}}{l}\,\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right) r^{1+\lambda}$ *et des termes complémentaires*] *bien que les formules soient plus compliquées. On retrouve, en particulier, les séquences où alternent r^{2p-1} et $r^{2p}\log r$. Par contre,* aux longues distances *($r > l$), l'effet régularisateur de la montée ne se fait plus sentir, et r^{λ} donne un terme dont la partie principale est r^{λ}.*

Le paragraphe 1 *définit les montées sous puissance constante, d'ordre 1 et 2, et donne les algorithmes correspondants, notamment ceux de la montée droite en schéma isotrope.*

Le paragraphe 2 *donne les développements explicites, aux longues et aux courtes distances, de la montée d'ordre 1 sur r^{λ}, d'abord dans le cas général, puis dans les trois cas particuliers les plus usuels : λ entier pair ou impair, et termes en $r^2 p \log r$.*

Le paragraphe 3 *donne les formules du rectangle : $\chi_{\lambda}(b\,;\,a)$ est la valeur moyenne de r^{λ} entre un rectangle (a, b) et son côté a, $\mathrm{F}_{\lambda}(ab)$ est la valeur moyenne de r^{λ} dans le rectangle lui-même. Les développements sont établis pour λ quelconque, et pour les trois cas particuliers habituels.*

Le paragraphe 4 *donne les formules du parallélépipède : $\mathrm{F}_{\lambda}(a, b, c)$, par exemple, est la valeur moyenne de r^{λ} dans le parallélépipède (a, b, c). On obtient des séries doubles, ordonnées selon les puissances croissantes de $a (a \geqslant b \geqslant c)$.*

1. — Définition et algorithmes de la montée sous puissance constante.

En représentation transitive, la montée apparaissait comme un cas limite de la régularisation d'une variable régionalisée par la fonction de prélèvement $p(x) = k(x)$ correspondant à la prise de l'échantillon v,

lorsque le support v se réduisait à une droite indéfinie. En intrinsèque, la montée ne peut plus se faire le long d'une droite indéfinie, car, stationnaire, la régionalisation se poursuit homogène, dans tout l'espace et $f(x)$ ne peut pas être sommable. Par contre, rien n'empêche d'effectuer la montée le long d'un segment de droite de longueur finie. Nous appellerons *puissance* la longueur d'un tel segment, et nous nous intéresserons à *la montée sous puissance finie.* Si l'on imagine une formation géologique horizontale minéralisée, possédant en un point une puissance, ou épaisseur, donnée, la montée effectuée en ce point et sous cette puissance constitue une transposition abstraite de l'opération technique très courante qui consiste à forer un sondage vertical en ce point.

Il existe trois manières possibles de concevoir la montée sous puissance finie, selon que cette puissance est supposée stochastique, variable mais déterminée, ou enfin constante. La montée stochastique serait sans doute la plus intéressante, du point de vue théorique, mais conduit à des grandes difficultés mathématiques, dès que l'on considère $f(x)$ et la puissance de la montée comme des variables aléatoires non indépendantes. Une montée sous puissance variable, mais déterminée, de son côté, ne permet pas de conserver la caractère stationnaire ou intrinsèque de la fonction aléatoire. Nous nous limiterons donc à la montée sous puissance constante, qui, en tant qu'approximation localement valable d'une puissance qui ne varie pas trop rapidement, suffit en général dans les applications pratiques.

Soit, dans un espace à n dimensions, un schéma intrinsèque $f_n(x)$ admettant la fonction de dispersion $\gamma_n(h)$, et soit un vecteur $l\alpha$, de longueur, ou puissance, l et de cosinus directeurs $\alpha(= \alpha_1 \ldots \alpha_n)$, le long duquel nous désirons effectuer la montée. A tout point x d'un plan de référence Π (non parallèle à α), nous faisons correspondre l'expression (stochastique)

$$(XI,1,1) \qquad f_{n-1}(x) = \frac{1}{l} \int_0^l f_n(x + \lambda\alpha)\, d\lambda.$$

Relativement aux points x du plan Π, $f_{n-1}(x)$ est une fonction aléatoire à $n - 1$ dimensions. Elle représente la teneur moyenne (stochastique) des vecteurs parallèles à $l\alpha$ ayant leur origine dans le plan Π. On vérifiera facilement que les accroissements

$$f_{n-1}(y) - f_{n-1}(x)$$

entre deux points x et y de Π possèdent le caractère stationnaire, de sorte que $f_{n-1}(x)$ est elle-même un *schéma stochastique intrinsèque à $n - 1$ dimensions.* Si l'on suppose, comme on le fait toujours, que les accroissements de f_n ont une valeur probable identiquement nulle, il en est évidemment de même des accroissements de f_{n-1}. Reste à déterminer la fonction de dispersion intrinsèque $\gamma_{n-1}(h)$ de $f_{n-1}(x)$. D'après la définition (VIII,1,6) on doit avoir :

$$(XI,1,2) \qquad \gamma_{n-1}(h) = \frac{1}{2} D^2[f_{n-1}(x + h) - f_{n-1}(x)].$$

Autrement dit, $\gamma_{n-1}(h)$ est égal à la moitié de la variance d'extension des deux variables aléatoires $f_{n-1}(x+h)$ et $f_{n-1}(x)$ définies en (XI,1,1), et peut être calculée, à partir de $\gamma_n(h)$, à l'aide de la formule générale (VIII,3,13) qui donne ici :

$$2\gamma_{n-1}(h) = \frac{2}{l^2}\int_0^l\int_0^l \gamma_n[h+(t'-t)\alpha]\,dt\,dt' - \frac{2}{l^2}\int_0^l\int_0^l \gamma_n[(t-t')\alpha]\,dt\,dt'.$$

La première intégrale représente la valeur moyenne de $\gamma_n(x-x')$ lorsque les deux extrémités x et x' de l'argument $x-x'$ décrivent, séparément, deux vecteurs $l\alpha$ égaux et translatés l'un de l'autre dans la translation h. La deuxième intégrale représente la même valeur moyenne pour $h=0$, c'est-à-dire lorsque ces deux vecteurs coïncident. En simplifiant par 2, et en utilisant l'algorithme de Cauchy (I,2,9) le $\gamma_{n-1}(h)$ se met sous la forme

$$\text{(XI,1,3)}\quad \gamma_{n-1}(h) = \frac{2}{l^2}\int_0^l (l-t)\gamma_n(h+t\alpha)\,dt - \frac{2}{l^2}\int_0^l (l-t)\gamma_n(t\alpha)\,dt.$$

Dans le cas général, le plan Π n'est pas perpendiculaire à la direction α, et la montée est dite *oblique*. Lorsque Π est perpendiculaire à α, on dit que la montée est *droite*. Si la montée est droite, et si, de plus, la fonction intrinsèque est isotrope, c'est-à-dire si elle peut se mettre sous la forme d'une fonction $\gamma_n(r)$ de la seule variable $r=|h|=\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}$, la formule (XI,1,3) prend l'expression suivante, dite *algorithme de la montée droite isotrope* :

(XI,1,4)

$$\gamma_{n-1}(r) = \frac{2}{l^2}\int_0^l (l-x)\gamma_n\left[\sqrt{r^2+x^2}\right]dx - \frac{2}{l^2}\int_0^l (l-x)\gamma_n(x)\,dx.$$

C'est cette expression qui sera le plus souvent utilisée dans les applications. La fonction γ_{n-1} ainsi déterminée permet de calculer toutes les variances ou covariances d'extension intéressant la variable $f_{n-1}(x)$ régionalisée dans le plan Π.

Montée d'ordre 2. — Il est possible de réitérer l'opération, en effectuant une nouvelle montée de puissance l' le long d'un vecteur $\alpha' l'$ appartenant au plan Π (c'est-à-dire un vecteur $\alpha' l'$ de l'espace à $n-1$ dimensions dans lequel est définie f_{n-1}). On obtient ainsi un nouveau schéma intrinsèque f_{n-2} à $n-2$ dimensions, dont la fonction de dispersion intrinsèque γ_{n-2} s'obtient en appliquant l'algorithme (XI,1,3) à γ_{n-1}, ou encore en appliquant directement à $\gamma_n(h)$ l'algorithme composé de la montée double, dont l'expression, symétrique en $l\alpha$ et $l'\alpha'$, est donnée par :

$$\text{(XI,1,5)}\quad \left\{\begin{aligned}\gamma_{n-2}(h) = {}& \frac{4}{l^2 l'^2}\int_0^l\int_0^{l'} (l-t)(l'-t')\gamma_n(h+t\alpha+t'\alpha')\,dt\,dt' \\ & - \frac{4}{l^2 l'^2}\int_0^l\int_0^{l'} (l-t)(l'-t')\gamma_n(t\alpha+t'\alpha')\,dt\,dt'.\end{aligned}\right.$$

Cet algorithme fait intervenir la valeur moyenne de $\gamma_n(x - x')$ lorsque les deux extrémités x et x' de l'argument vectoriel $(x - x')$ décrivent, séparément, deux parallélogrammes construits sur les vecteurs $l\alpha$ et $l'\alpha'$, égaux et translatés l'un de l'autre dans la translation h.

Si γ_n est isotrope, et si les deux montées sont droites (c'est-à-dire si les trois vecteurs h, α et α' sont perpendiculaires), comme ce sera le plus souvent le cas dans les applications, (XI,1,5) se met sous la forme suivante, dite algorithme de la montée droite isotrope d'ordre 2 :

$$\text{(XI,1,6)} \quad \begin{cases} \gamma_{n-2}(r) = \dfrac{4}{l^2 l'^2}\displaystyle\int_0^l\int_0^{l'} (l-x)(l'-x')\gamma_n\left[\sqrt{r^2+x^2+x'^2}\right] dx\,dx' \\ \qquad\qquad - \dfrac{4}{l^2 l'^2}\displaystyle\int_0^l\int_0^{l'} (l-x)(l'-x')\gamma_n\left[\sqrt{x^2+x'^2}\right] dx\,dx'. \end{cases}$$

La montée intrinsèque, notamment dans le cas isotrope, apparaît comme moins simple que la montée transitive. Les paramètres se multiplient (l pour la montée d'ordre 1, l et l' pour la montée d'ordre 2), contrairement à ce qui se passait en transitif, et les calculs sont moins simples. Mais il faut bien voir qu'une formule telle que (XI,1,6) décrit l'évolution, le long d'une droite (d'un plan à $n - 2$ dimensions) des teneurs moyennes portées par les sections droites d'un prisme dont la base est un rectangle ll'.

2. — Montée droite sous puissance constante de r^λ.

En vue des applications pratiques, nous allons traiter explicitement le cas de la montée droite d'ordre 1 sous puissance constante l du demi-variogramme isotrope $\gamma_n(r) = r^\lambda$. Les résultats s'expriment à l'aide des fonctions hypergéométriques, déjà rencontrées au chapitre II, et auxquelles est également consacrée l'Annexe E.

Dans ce qui suit, nous poserons :

$$\text{(XI,2,1)} \qquad \gamma_\lambda(r) = \frac{2}{l^2}\int_0^l (l-x)(x^2+r^2)^{\frac{\lambda}{2}}\,dx.$$

Cette fonction γ_λ, qui représente la valeur moyenne de $|h|^\lambda$ lorsque les deux extrémités du vecteur h balayent, séparément, les deux côtés de longueur l d'un rectangle lr, diffère du demi-variogramme cherché $\gamma_{n-1}(r)$ par une simple constante, que l'on détermine facilement, d'après (XI,1,4), en écrivant :

$$\text{(XI,2,2)} \qquad \gamma_{n-1}(r) = \gamma_\lambda(r) - \gamma_\lambda(0)$$

Pour calculer γ_λ, on posera, en premier lieu :

$$\begin{cases} \gamma_\lambda = I_1(\lambda) - I_2(\lambda) \\ I_1(\lambda) = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l (x^2+r^2)^{\frac{\lambda}{2}}\,dx \\ I_2(\lambda) = \dfrac{2}{l^2}\displaystyle\int_0^l (x^2+r^2)^{\frac{\lambda}{2}}\,x\,dx. \end{cases}$$

En faisant le changement de variable $x = \sqrt{u}$, la deuxième intégrale se calcule exactement, et donne :

$$I_2(\lambda) = \frac{2}{l^2(\lambda+2)}\left[(l^2+r^2)^{1+\frac{\lambda}{2}} - r^{\lambda+2}\right].$$

En notation de fonctions hypergéométriques, on a aussi :

(XI,2,3)

$$\left\{\begin{aligned} I_2(\lambda) &= r^\lambda F\left(-\frac{\lambda}{2}, 1, 2, -\frac{l^2}{r^2}\right) \\ &= \frac{2}{\lambda+2} l^\lambda F\left(-\frac{\lambda}{2}, -1-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, -\frac{r^2}{l^2}\right) - \frac{2}{\lambda+2}\frac{r^{\lambda+2}}{l^2}. \end{aligned}\right.$$

Ces expressions se développent expolicitement par la formule (E,1,1). La première est utilisable aux longues distances ($l < r$), et la deuxième aux courtes distances ($l > r$).

Pour calculer $I_1(\lambda)$, on fera le changement de variable $x = l\sqrt{v}$ qui donne :

$$I_1(\lambda) = r^\lambda \int_0^1 \left[1 + v\frac{l^2}{r^2}\right]^{\frac{\lambda}{2}} v^{-\frac{1}{2}} dv.$$

En comparant avec la représentation intégrale (E,1,4) de l'hypergéométrique, il vient :

(XI,2,4) $$I_1(\lambda) = 2r^\lambda F\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{l^2}{r^2}\right).$$

Cette formule donne un développement utilisable aux grandes distances ($r > l$). Pour obtenir un développement en $\frac{r^2}{l^2}$, valable aux courtes distances ($r < l$), nous devons transformer (XI,2,4) à l'aide de la formule d'échange (E,3,1) de l'annexe E. Il vient ainsi :

(XI,2,5)

$$I_1(\lambda) = \frac{2}{\lambda+1} l^\lambda F\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{1+\lambda}{2}, \frac{1-\lambda}{2}, -\frac{r^2}{l^2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\frac{r^{1+\lambda}}{l}.$$

Compte tenu de (XI,2,3) et (XI,2,4), on obtient le développement de $\gamma_\lambda(r)$ pour $r \geqslant l$ sous la forme suivante :

(XI,2,6)

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_\lambda(r) &= r^\lambda\left[2F\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{l^2}{r^2}\right) - F\left(-\frac{\lambda}{2}, 1, 2, -\frac{l^2}{r^2}\right)\right], \\ &= r^\lambda\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda}{2}-k+1\right)}{(2k+1)(k+1)!}\left(\frac{l}{r}\right)^{2k}\right]. \end{aligned}\right.$$

On notera que, pour $\frac{l}{r}$ très petit, la partie principale de $\gamma_\lambda(r)$ est

r^λ. Ainsi, *la montée n'altère pas le comportement d'une fonction intrinsèque aux grandes distances.*

Aux courtes distances ($r \leqslant l$), au contraire, compte tenu de (XI,2,3) et (XI,2,5), on obtient l'expression plus complexe suivante :

(XI,2,7)

$$\left\{\begin{aligned}\gamma_\lambda(r) = {} & \frac{2}{\lambda+1}\, l^\lambda \mathrm{F}\left[-\frac{\lambda}{2}, -\frac{1+\lambda}{2}, \frac{1-\lambda}{2}, -\frac{r^2}{l^2}\right] + \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{r^{1+\lambda}}{l} \\ & - \frac{2}{\lambda+2}\, l^\lambda \mathrm{F}\left[-\frac{\lambda}{2}, -1-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, -\frac{r^2}{l^2}\right] + \frac{2}{\lambda+2}\frac{r^{\lambda+2}}{l^2}.\end{aligned}\right.$$

Sous forme explicite, ce développement s'écrit :

(XI,2,8)

$$\left\{\begin{aligned}\gamma_\lambda(r) = {} & \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \frac{r^{1+\lambda}}{l} + \frac{2}{\lambda+2}\frac{r^{\lambda+2}}{l^2} \\ & + l^\lambda\left[\frac{2}{(1+\lambda)(2+\lambda)} + \frac{1}{\lambda-1}\frac{r^2}{l^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda}{2}-k+2\right)}{(\lambda+1-2k)\,k!}\left(\frac{r}{l}\right)^{2k}\right].\end{aligned}\right.$$

Ce développement fait apparaître — comme en transitif — une partie régulière, qui est une série entière paire en $\frac{r}{l}$, avec un facteur l^λ qui s'introduit pour des raisons d'homogénéité dimensionnelle, et une partie irrégulière. Contrairement à ce qui se produisait dans le cas de la montée transitive, cette partie irrégulière comprend non pas un seul terme, mais deux, l'un en $\frac{r^{1+\lambda}}{l}$, et l'autre en $\frac{r^{2+\lambda}}{l^2}$. Cependant, lorsque $\frac{r}{l}$ est très petit, la partie principale de γ_λ est constituée par ce terme en $\frac{r^{1+\lambda}}{l}$, et une simple inspection de son coefficient montre qu'au facteur $\frac{1}{l}$ près, qui s'introduit pour des raisons d'homogénéité dimensionnelle, la règle de la montée, pour cette partie principale, est la même qu'en transitif :

$$\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right) r^\lambda \to \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right) r^{\lambda+1}.$$

Ainsi, *aux courtes distances, la montée intrinsèque a le même effet régularisateur que la montée transitive.*

Dans les applications pratiques, on aura surtout affaire à des exposants λ entiers, pairs ou impairs, et aussi à des termes logarithmiques de la forme $r^{2p}\log r$, $2p$ étant un entier pair. On doit s'attendre à retrouver la séquence logarithmique de la montée transitive, et on la retrouve, en effet, malgré une plus grande complexité des formules. Examinons, successivement, ces trois cas particuliers.

Cas d'un entier $\lambda = 2p$. — Ce cas est particulièrement simple, $\gamma_\lambda(r)$ se réduisant à un polynome pair homogène, de degré $2p$ en r et l. En effet, le développement (XI,2,6) s'arrête au terme d'ordre $k = p$. On a ainsi :

$$\text{(XI,2,9)} \qquad \begin{cases} \gamma_2(r) = r^2 + \dfrac{1}{6} l^2 \\ \gamma_4(r) = r^4 + \dfrac{1}{3} r^2 l^2 + \dfrac{1}{15} l^4 \\ \gamma_6(r) = r^6 + \dfrac{1}{2} r^4 l^2 + \dfrac{1}{5} r^2 l^4 + \dfrac{1}{28} l^6. \end{cases}$$

Cas d'un entier impair $\lambda = 2p - 1$. — Dans ce cas, le développement (XI,2,6), qui est infini, n'est utilisable que pour $r \geqslant l$. Aux courtes distances, $r \leqslant l$, le développement (XI,2,8) présente des singularités, et doit être étudié par la méthode habituelle du passage à la limite (on pose $\lambda = 2p - 1 + \varepsilon$, et on cherche la limite des différents termes lorsque ε tend vers 0). On s'attend à voir apparaître un terme en $r^{2p} \log r$. Effectivement, dans (XI,2,8), deux termes seulement présentent des singularités pour $\lambda = 2p - 1$: d'une part, le terme isolé en $r^{1+\lambda}$, de l'autre le terme d'ordre $k = p$ de la série entière paire. Ecrivons ces deux termes :

$$\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(-\dfrac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)} \frac{r^{1+\lambda}}{l} + l^\lambda \frac{\dfrac{\lambda}{2}\left(\dfrac{\lambda}{2} - 1\right) \cdots \left(\dfrac{\lambda}{2} - p + 2\right)}{(\lambda + 1 - 2p)p\,!} \left(\frac{r}{l}\right)^{2p}.$$

Le lecteur vérifiera facilement que, lorsque λ tend vers $2p - 1$, la somme de ces deux termes admet la limite suivante :

$$\frac{r^{2p}}{l} \frac{\Gamma\left(p + \dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} p!} \left[\log \frac{l^2}{r^2} - 2 - \frac{\Gamma'\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)} + \frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)} \right]$$
$$= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{r^{2p}}{l} \left[\log \frac{l^2}{r^2} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p} - 2 + 2 \log 2 \right].$$

On en déduit l'expression de $\gamma_{2p-1}(r)$:

$$\text{(XI,2,10)} \qquad \begin{aligned} \gamma_{2p-1}(r) = {} & \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{r^{2p}}{l} \left[\log \frac{l^2}{r^2} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p} - 2 + 2 \log 2 \right] \\ & + \frac{2}{2p+1} \frac{r^{2p+1}}{l^2} \\ & + l^{2p-1} \left[\frac{1}{p(2p+1)} + \frac{1}{2p-2} \frac{r^2}{l^2} \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq p}}^{\infty} \frac{\left(p - \dfrac{1}{2}\right)\left(p - \dfrac{3}{2}\right) \cdots \left(p - k + \dfrac{3}{2}\right)}{2(p-k)\,k!} \left(\frac{r}{l}\right)^{2k} \right] \end{aligned}$$

et, dans le cas particulier $\lambda = 1$:

(XI,2,11)

$$\gamma_1(r) = l\left[\frac{1}{3} + \frac{r^2}{l^2}\left(\log\frac{l}{r} + \log 2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}\frac{r^2}{l^2} - \frac{1}{8}\frac{r^4}{l^4} + \frac{1}{96}\frac{r^6}{l^6} + \cdots\right].$$

Dans ce cas particulier $\lambda = 1$, on peut d'ailleurs, par des calculs directs, obtenir l'expression exacte :

(XI,2,12)

$$\gamma_1(r) = \frac{1}{3}\sqrt{l^2 + r^2} + \frac{2}{3}\frac{r^2}{l^2}\left[r - \sqrt{l^2 + r^2}\right] + \frac{r^2}{l}\log\frac{l + \sqrt{l^2 + r^2}}{r}.$$

Termes logarithmiques en r^{2p} log r. — D'une manière générale, on obtiendra la montée du terme $r^\lambda \log r$ en dérivant en λ les développements précédents. Dans les applications, on rencontrera surtout des termes en $r^{2p}\log r$, $2p$ étant un entier pair. Sous la forme (XI,2,8) des simplifications notables apparaissent, du fait que $\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$ prend une valeur infinie. Le terme singulier principal en $r^{1+\lambda}$:

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\frac{r^{1+\lambda}}{l} = \sqrt{\pi}\,\frac{\sin\lambda\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{1+\lambda}{2}\pi}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\lambda\right)}\frac{r^{1+\lambda}}{l}$$

donne, en effet, en faisant $\lambda = 2p$ après dérivation en λ

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)}\frac{r^{1+2p}}{l} = \pi\,\frac{2^{2p}(p\,!)^2}{(2p+1)\,!}\frac{r^{2p+1}}{l}.$$

On reconnaît, au facteur $\frac{1}{l}$ près, l'expression de la montée transitive sur $r^{2p}\log r$. A titre d'exemple, et pour servir aux applications, nous allons donner l'expression explicite de la montée sur $\log r$ et $r^2\log r$ ($p = 0$ et $p = 1$). Pour $\log r$, les développements à longue distance ($r > l$) et à courte distance ($r < l$) sont les suivants :

(XI,2,13)

$$\begin{cases} \left[\frac{d}{d\lambda}\gamma_\lambda(r)\right]_{\lambda=0} = \log r + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)(2k+1)}\left(\frac{l}{r}\right)^{2k} \\ = \log l - \frac{3}{2} + \pi\frac{r}{l} + \frac{r^2}{l^2}\left[\log\frac{r}{l} - \frac{3}{2}\right] + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)(2k-1)}\left(\frac{r}{l}\right)^{2k}. \end{cases}$$

On peut d'ailleurs obtenir, par des calculs directs, l'expression entière suivante :

(XI,2,14)

$$\left[\frac{d}{d\lambda}\gamma_\lambda(r)\right]_{\lambda=0} = \log l - \frac{3}{2} - \log\sin\theta + \frac{2\theta}{\operatorname{tg}\theta} + \frac{\log\cos\theta}{\operatorname{tg}^2\theta} \quad \left(\theta = \operatorname{Arc\,tg}\frac{l}{r}\right).$$

De même, les développements à longue $r > l$) et à courte ($r < l$) distance de la montée effectuée sur le terme $r^2 \log r$ ont les expressions suivantes :

(XI,2,15)

$$\left\{\begin{aligned}\left[\frac{d}{d\lambda}\gamma_\lambda(r)\right]_{\lambda=2} &= r^2 \log r + \frac{1}{6} l^2 \log r \\ &\quad + r^2\left[\frac{1}{12}\frac{l^2}{r^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)(k-1)(2k+1)}\frac{l^{2k}}{r^{2k}}\right] \\ &= \frac{2}{3}\pi\frac{r^3}{l} + \frac{1}{2}\frac{r^4}{l^2}\log r + l^2 \log l\left[\frac{1}{6} + \frac{r^2}{l^2} - \frac{1}{2}\frac{r^4}{l^4}\right] \\ &\quad + l^2\left[-\frac{7}{72} - \frac{r^2}{l^2} - \frac{7}{8}\frac{r^4}{l^4} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(k-1)(k-2)(2k-3)}\frac{r^{2k}}{l^{2k}}\right].\end{aligned}\right.$$

3. — Les formules du rectangle pour r^λ.

Dans les applications pratiques, et notamment, comme nous le verrons dans le chapitre XII, dans le calcul des variances d'estimations, on s'efforce en général, par des montées effectuées successivement, de se ramener au cas d'un schéma intrinsèque à une dimension. Outre le demi-variogramme $\gamma(h)$ du schéma à une seule dimension, on utilise constamment *les deux fonctions intrinsèques auxiliaires* $\chi(h)$ *et* $F(h)$ définies par :

(XI,3,1)
$$\left\{\begin{aligned}\chi(h) &= \frac{1}{h}\int_0^h \gamma(x)\,dx, \\ F(h) &= \frac{2}{h^2}\int_0^h x\chi(x)\,dx = \frac{2}{h^2}\int_0^h (h-x)\gamma(x)\,dx.\end{aligned}\right.$$

La fonction $\chi(h)$ donne la valeur moyenne de $\gamma(x)$, lorsque x représente la distance entre un point courant d'un segment de longueur h et l'une de ses extrémités fixes. La fonction $F(h)$ représente la valeur moyenne de $\gamma(x)$ lorsque x est la distance de deux points courants, décrivant indépendamment le segment de longueur h. $F(h)$ permet le calcul de la variance d'un segment l dans un champ de longueur L, conformément à la formule (VIII,4,4) :

$$\sigma^2(l|\mathrm{L}) = F(\mathrm{L}) - F(l)$$

De même $\chi(h)$ permet le calcul de la covariance $\sigma(0, l|\mathrm{L})$ dans un champ L d'un segment l et d'une de ses extrémités; conformément à (VIII,4,7).

$$\sigma(0,\ l|\mathrm{L}) = F(\mathrm{L}) - \chi(l)$$

Ainsi, encore, la variance d'extension d'un échantillon de longueur l petite dans un segment L au centre duquel il est implanté se met sous la forme :

$$\sigma_{\mathrm{E}}^2 = 2\chi\left(\frac{l}{2}\right) - F(\mathrm{L}) - F(l)$$

Les fonctions auxiliaires $\chi(h)$ et $F(h)$, obtenues en appliquant (X,3,1) aux expressions de $\gamma_\lambda(r)$ obtenues dans le paragraphe précédent sont données par les formules du rectangle (pour r^λ), que nous allons établir explicitement, en raison de leur importance dans les applications.

Notations et méthode. — Comme $\gamma_\lambda(h)$ représente la valeur moyenne de r^λ entre les deux côtés l distants de h d'un rectangle lh, $\chi(h)$ et $F(h)$ vont avoir, elles aussi, des significations géométriques précises : $\chi(h)$ va être la valeur moyenne de r^λ entre le rectangle lh et l'un de ses côtés l, et $F(h)$ la valeur moyenne de r^λ dans le rectangle lui-même, lorsque r représente la distance entre deux points parcourant indépendamment le rectangle.

Pour plus de clarté, nous remplaçons l et h par a et b, et nous supposerons toujours

$$b \leqslant a. \tag{XI,3,2}$$

Nous désignerons par $F_\lambda(a, b)$ la valeur moyenne de r^λ dans le rectangle (a, b), par $\chi_\lambda(b; a)$ la valeur moyenne de r^λ entre le rectangle et son grand côté a, et de même par $\chi_\lambda(a; b)$ cette valeur moyenne prise entre le rectangle et son petit côté b.

$F_\lambda(a, b)$ est une expression symétrique en a et b. On a, en effet :

$$F_\lambda(a, b) = \frac{4}{a^2 b^2} \int_0^a \int_0^b (a - x)(b - y)(x^2 + y^2)^{\frac{\lambda}{2}}\, dx\, dy. \tag{XI,3,3}$$

On montre facilement que $F_\lambda(a, b)$ s'exprime à l'aide de fonctions hypergéométriques :

$$\left\{ \begin{aligned} F_\lambda(a, b) = {} & \frac{4a^\lambda}{(\lambda+2)(\lambda+3)} F\left[-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{b^2}{a^2}\right] \\ & + \frac{4b^\lambda}{(\lambda+2)(\lambda+3)} F\left[-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{a^2}{b^2}\right] \\ & - \frac{4}{a^2 b^2} \frac{(a^2+b^2)^{2+\frac{\lambda}{2}} - a^{\lambda+4} - b^{\lambda+4}}{(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)}. \end{aligned} \right. \tag{XI,3,4}$$

Par contre $\chi_\lambda(b; a)$ et $\chi_\lambda(a; b)$ ne sont pas symétriques en a et b. De (XI,3,1) résulte immédiatement que ces deux fonctions se déduisent de $F_\lambda(a, b)$ par des dérivations en b et en a respectivement, soit :

$$\left\{ \begin{aligned} \chi_\lambda(b;a) &= \frac{1}{2b} \frac{\partial}{\partial b} b^2 F_\lambda(a, b) \\ \chi_\lambda(a;b) &= \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial a} a^2 F_\lambda(a, b). \end{aligned} \right. \tag{XI,3,5}$$

De même encore, désignons par $\gamma_\lambda(b; a)$ la valeur moyenne de r^λ entre les deux grands côtés de longueur a du rectangle, distants de b, et par

$\gamma_\lambda(a; b)$ la même valeur moyenne entre les petits côtés de longueur b, distants de a. On a :

$$\text{(XI,3,6)} \qquad \begin{cases} \gamma_\lambda(b; a) = \dfrac{\partial}{\partial b} b\chi_\lambda(b; a) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial b^2} b^2 \mathrm{F}_\lambda(a, b) \\ \gamma_\lambda(a; b) = \dfrac{\partial}{\partial a} a\chi_\lambda(a; a) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial a^2} a^2 \mathrm{F}_\lambda(a, b). \end{cases}$$

On pourrait obtenir les développements explicites, à partir de (XI,3,4) et en transformant la deuxième hypergéométrique par la formule d'échange (E,3,1). Il est plus simple de procéder par intégrations et dérivations terme à terme. On partira de $\gamma_\lambda(b; a)$ dont le développement est donné par (XI,2,8) avec $r = b$, et $l = a$. Par intégrations successives terme à terme en b (ce qui est légitime, puisque $b < a$), on en déduit $\chi_\lambda(b; a)$, puis $\mathrm{F}_\lambda(a, b)$. Enfin par dérivations successives terme à terme en a de $\mathrm{F}_\lambda(a, b)$. on obtient $\chi_\lambda(a; b)$ et $\gamma_\lambda(a, b)$: Cette dernière fonction $\gamma_\lambda(a; b)$ doit coïncider, avec (XI,2,6), en posant $r = a$, et $l = b$. Cette circonstance est générale, et montre que, *dans les formules du rectangle, les développements à longue distance peuvent toujours se déduire des développements à courte distance, par intégrations et dérivations successives*, tandis que le passage inverse n'est pas possible en général.

Développements explicites pour* λ *quelconque. — $\gamma_\lambda(b; a)$ est une expression homogène de degré λ en a et b. Le terme général, de la forme $b^\mu a^{\lambda+\mu}$, donne, par intégration en b, les termes

$$\frac{1}{\mu + 1} b^\mu a^{\lambda+\mu}$$

et

$$\frac{2}{(\mu + 1)(\mu + 2)} b^\mu a^{\lambda+\mu}$$

pour $\chi_\lambda(b; a)$ et $\mathrm{F}_\lambda(a, b)$ respectivement.

Par dérivation, selon (XI,3,5) et (XI,3,6), on obtient les termes :

$$\frac{\lambda + 2 - \mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} b^\mu a^{\lambda-\mu}$$

et

$$\frac{(\lambda + 2 - \mu)(\lambda + 1 - \mu)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} b^\mu a^{\lambda-\mu}$$

pour $\chi_\lambda(a; b)$ et $\gamma_\lambda(a; b)$. Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier que (XI,2,6) se déduit effectivement de (XI,2,8). Les termes irréguliers en $\dfrac{b^{1+\lambda}}{a}$ et $\dfrac{b^{2+\lambda}}{a^2}$ disparaissent purement et simplement, et cette circonstance souligne bien qu'il n'est pas possible, inversement, de déduire (XI,2,8) du développement à longue distance (XI,2,6).

Toujours avec $b \leqslant a$, les développements de F_λ et des fonctions χ_λ sont les suivantes :

(XI,3,7)

$$\left\{\begin{aligned} F_\lambda(a,\ b) = {} & \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{(\lambda+2)(\lambda+3)\,\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\frac{b^{1+\lambda}}{a} + \frac{4}{(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)}\frac{b^{2+\lambda}}{a^2} \\ & + a^\lambda\left[\frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} + \frac{1}{6(\lambda-1)}\frac{b^2}{a^2}\right. \\ & \left. + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda}{2}-k+2\right)}{(\lambda+1-2k)\,(2k+1)\,(k+1)\,!}\frac{b^{2k}}{a^{2k}}\right]. \end{aligned}\right.$$

(XI,3,8)

$$\left\{\begin{aligned} \chi_\lambda(b;\ a) = {} & \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{(\lambda+2)\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\frac{b^{1+\lambda}}{a} + \frac{2}{(\lambda+2)(\lambda+3)}\frac{b^{2+\lambda}}{a^2} \\ & + a^\lambda\left[\frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} + \frac{1}{3(\lambda-1)}\frac{b^2}{a^2}\right. \\ & \left. + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda}{2}-k+2\right)}{(\lambda+1-2k)(2k+1)k\,!}\frac{b^{2k}}{a^{2k}}\right]. \end{aligned}\right.$$

(XI,3,9)

$$\left\{\begin{aligned} X_\lambda(a;\ b) = {} & \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{(\lambda+2)(\lambda+3)\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\frac{b^{1+\lambda}}{a} \\ & + a^\lambda\left[\frac{1}{\lambda+1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{\lambda}{2}-k+1\right)}{(\lambda+1-2k)(2k+1)(k+1)\,!}\frac{b^{2k}}{a^{2k}}\right] \end{aligned}\right.$$

Dans les applications, λ sera le plus souvent un entier pair ou impair, et l'on aura aussi affaire aux termes lorgaithmiques en $r^{2p}\log r$. Examinons ces cas particuliers.

Cas d'un entier pair $\lambda = 2p$. — Les développements ci-dessus restent utilisables, et se simplifient considérablement. D'une part, $\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$ étant infini, le terme irrégulier en $\frac{b^{1+\lambda}}{a}$ s'évanouit, de l'autre la série entière se réduit à un polynôme pair de degré $2p$ en $\frac{b}{a}$. Il n'est pas utile d'écrire ici les expressions explicites.

Cas d'un entier impair $\lambda = 2p-1$. — Dans ce cas, on doit effectuer les mêmes intégrations et dérivations successives sur $\gamma_{2p-1}(b;\ a)$ dont le

développement se déduit de (XI,2,10) en posant

$$r = b \qquad \text{et} \qquad l = a.$$

Un terme de la forme $b^{\mu}a^{\lambda-\mu}\log\frac{b}{a}$ apporte les contributions suivantes à

$$\chi(b;\,a), \qquad \mathrm{F}(a,\,b) \qquad \text{et} \qquad \chi(a;\,b)$$

respectivement :

(XI,3,10)

$$\begin{cases} \dfrac{a^{\lambda-\mu}b^{\mu}}{\mu+1}\log\dfrac{b}{a} - \dfrac{a^{\lambda-\mu}b^{\mu}}{(\mu+1)^2} \\ \dfrac{2}{(\mu+1)(\mu+2)}\,a^{\lambda-\mu}b^{\mu}\log\dfrac{b}{a} - \dfrac{2(2\mu+3)}{(\mu+1)^2(\mu+2)^2}\,a^{\lambda-\mu}b^{\mu} \\ \dfrac{2+\lambda-\mu}{(\mu+1)(\mu+2)}\,a^{\lambda-\mu}b^{\mu}\log\dfrac{b}{a} - \left[\dfrac{1}{(\mu+1)(\mu+2)} + \dfrac{(2+\lambda-\mu)(2\mu+3)}{(\mu+1)^2(\mu+2)^2}\right]a^{\lambda-\mu}b^{\mu} \end{cases}$$

Appliquant ces résultats à (XI,2,10), on obtient :

(XI,3,11)

$$\begin{cases} \chi_{2p-1}(b;\,a) = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(2p+1)(p!)^2} \\ \qquad \left[2\log\dfrac{a}{b} + \dfrac{2}{2p+1} + 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{p} - 2 + 2\log 2\right]\dfrac{b^{2p}}{a} + \cdots \\ \mathrm{F}_{2p-1}(a,\,b) = \dfrac{2^{1-2p}(2p)!}{(2p+1)(2p+2)(p!)^2}\,\dfrac{b^{2p}}{a} \\ \quad \left[2\log\dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{2}{2p+1} + 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{p} - 2 + 2\log 2\right] + \cdots \\ \chi_{2p-1}(a;\,b) = \dfrac{2^{-2p}(2p)!}{(2p+1)(2p+2)(p!)^2}\,\dfrac{b^{2p}}{a} \\ \qquad \left[2\log\dfrac{a}{b} + \dfrac{2}{2p+1} + 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p+1} - 2\log 2\right] + \cdots \end{cases}$$

Dans ces formules (XI,3,11), on n'a écrit explicitement que le terme irrégulier, qui remplace à la fois le terme en $\dfrac{b^{1+\lambda}}{a}$ et le terme en $a^{\lambda}\dfrac{b^{2p}}{a^{2p}}$ des développements (XI,3,7) (XI,3,8) et (XI,3,9). Les autres termes sont identiques aux termes correspondants de ces développements, écrits avec $\lambda = 2p - 1$.

Termes logarithmiques en r^{2p} log r. — Le cas des termes en $r^{2p}\log r$ se traite, à partir des développements (XI,2,13) et (XI,2,14), par la même méthode d'intégrations et dérivations successives. Nous donnerons seulement l'expression explicite de la fonction F dans le cas $p = 0$

et $p = 1$: les fonctions χ s'en déduisent facilement par application de (XI,3,5).

(XI,3,12)

$$\left\{\begin{aligned}
\left[\frac{d}{d\lambda} F_\lambda(a, b)\right]_{\lambda=0} &= \log a - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{3}\frac{b}{a} + \frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\left[\log\frac{b}{a} - \frac{25}{12}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)(k+1)(2k-1)(2k+1)}\frac{b^{2k}}{a^{2k}} \\
\left[\frac{d}{d\lambda} F_\lambda(a, b)\right]_{\lambda=2} &= \frac{\pi}{15}\frac{b^3}{a} + \frac{1}{3}\frac{b^4}{a^2}\log\frac{b}{a} - \frac{11}{900}\frac{b^4}{a^2} \\
&\quad + \frac{1}{6}a^2\log a + \frac{1}{6}b^2\log a \\
&\quad + a^2\left[-\frac{7}{72} - \frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2} - \frac{7}{120}\frac{b^4}{a^4}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)(k-1)(k-2)(2k-3)(2k+1)}\frac{b^{2k}}{a^{2k}}\right].
\end{aligned}\right.$$

4. — Les formules du parallélépipède pour r^λ.

Une deuxième montée, effectuée sur les développements obtenus, conduit aux formules du parallélépipède. Soient $a \geqslant b \geqslant c$ les trois arêtes du parallélélipipède. Désignons par $F_\lambda(a, b, c)$ la valeur moyenne de r^λ dans ce parallélépipède, par $\gamma_\lambda(a; bc)$ la valeur moyenne de r^λ entre 2 faces bc distantes de a, par $\chi_\lambda(a; bc)$ la valeur moyenne de r^λ entre le parallélépipède et une face bc. Le développement de $\gamma_\lambda(r; a)$, mis sous la forme

$$\gamma_\lambda(r; a) = \sum_\mu A_\mu a^{\lambda-\mu} b^\mu$$

donne, en effectuant une montée terme à terme sous la puissance b, et en intégrant ensuite en c :

(XI,4,1)

$$\left\{\begin{aligned}
\gamma_\lambda(c; ab) &= \sum_\mu A_\mu a^{\lambda-\mu}\gamma_\mu(c; b) \\
\chi_\lambda(c; ab) &= \sum_\mu A_\mu a^{\lambda-\mu}\chi_\mu(c; b) \\
F_\lambda(a, b, c) &= \sum_\mu A_\mu a^{\lambda-\mu} F_\mu(b, c).
\end{aligned}\right.$$

En dérivant en b, on obtient les formules des sections intermédiaires :

(XI,4,2)

$$\left\{\begin{aligned}
\chi_\lambda(b; ac) &= \frac{1}{2b}\frac{\partial}{\partial b} b^2 F_\lambda(a, b, c) = \sum_\mu A_\mu a^{\lambda-\mu}\chi_\mu(b; c) \\
\gamma_\lambda(b; ac) &= \frac{\partial}{\partial b} b\chi_\lambda(b; a, c) = \sum_\mu A_\mu a^{\lambda-\mu}\gamma_\mu(b; c)
\end{aligned}\right.$$

De même, en dérivant en a, on obtient les formules des petites sections :

(XI,4,3)

$$\left\{\begin{aligned}\chi_\lambda(a;bc) &= \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial a}a^2F_\lambda(a,b,c) = \frac{1}{2}\Sigma(\lambda+2-\mu)A_\mu a^{\lambda-\mu}F_\mu(b,c)\\ \gamma_\lambda(a;bc) &= \frac{\partial}{\partial a}a\chi_\lambda(a;bc) = \frac{1}{2}\Sigma(\lambda+2-\mu)(\lambda+1-\mu)A_\mu a^{\lambda-\mu}F_\mu(b,c).\end{aligned}\right.$$

Ces formules s'explicitent sous la forme de séries doubles. Il n'est pas utile d'écrire ici les expressions générales. Il vaut mieux, dans chaque cas particulier, calculer les premiers termes numériquement, en arrêtant les développements des γ_μ, χ_μ ou F_μ aux termes d'ordre voulu pour obtenir l'approximation souhaitée.

CHAPITRE XII

L'ESTIMATION ET LE KRIGEAGE

SOMMAIRE

Ce chapitre, long et parfois difficile, surtout dans le paragraphe 3, est fondamental pour les applications pratiques. Sur le plan théorique, il établit des règles de correspondance terme à terme entre les développements limités du $\gamma(h)$ *et de la variance d'estimation, moins simples qu'en transitif, mais possédant la même signification.*

Paragraphe 1. — *Ce paragraphe, de lecture facile, formule le problème général de l'estimation, qui comprend deux parties : d'une part le choix de la pondération à effectuer sur les valeurs expérimentales disponibles pour obtenir le meilleur estimateur : c'est le krigeage. D'autre part, le calcul de la variance d'estimation, qui doit se conduire de manière bien différente selon la nature du réseau de prélèvements : régulier à implantation préférentielle, régulier à implantation flottante, aléatoire pur ou aléatoire stratifié.*

Paragraphe 2. — *Propriétés générales des mailles régulières à implantation préférentielle. Après avoir posé la formule théorique de la variance d'estimation, on dégage deux principes simples d'approximation :* composition de termes de tranches et de section, *permettant de ramener tous les calculs à des problèmes à une seule dimension, et* composition des variances d'extension *élémentaires : ce dernier principe, moins général, ne peut s'appliquer qu'à une seule dimension et dans certains cas seulement.*

Paragraphe 3. — *Ce paragraphe, consacré au calcul explicite des variances d'estimation à une seule dimension (cas auquel on peut toujours se ramener), est long et difficile. Il dégage, en premier lieu, à l'aide de la formule de Mac Laurin le* principe de correspondance *terme à terme entre les développements limités de* $\gamma(h)$ *et de la variance d'estimation*

Si $\gamma(h) = \Sigma c_\lambda h^\lambda$, $\sigma_N^2 = \frac{1}{N}\Sigma R_\lambda c_\lambda a^\lambda + \frac{1}{N^2}\Sigma R'_\lambda c_\lambda a^\lambda$. *Mais ce principe ne s'applique que si le développement* $\Sigma c_\lambda h^\lambda$ *reste valable jusqu'en* $h = a$, a *étant la maille. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, on applique* le principe de composition des variances d'extension [*règles pratiques* (XII, 3,12) et (XII,3,13)].

On passe ensuite à l'établissement de la forme explicite de la règle de correspondance, c'est-à-dire au calcul de R_λ *et* R'_λ. *Les calculs sont assez longs, mais il n'est pas nécessaire de les suivre dans le détail. Le résultat essentiel* (XII, 3,21), *est particularisé aux cas où* $\lambda = 2k$, $2k - 1$ *et aux termes en* $h^{2k} \log h$. *Les*

formules sont établies dans le cas du dispositif centré *(échantillons implantés au centre de leurs segments d'influence). Le cas d'un* dispositif fermé *(estimation du segment compris entre un premier et un dernier échantillon) est examiné rapidement : les formules sont pratiquement les mêmes.*

Paragraphe 4. — *Étude des mailles régulières à implantation flottante : le réseau régulier est ici implanté, dans son ensemble, de manière quelconque par rapport au champ* V. *Celui-ci, en général, n'est pas connu a priori, et l'erreur commise sur son estimation se répercute, en partie, sur l'estimation de la teneur moyenne* (effet de bordure). *Les formules s'obtiennent facilement en passant en représentation transitive. On compare ensuite les mailles régulières à implantations préférentielle et flottante.*

Paragraphe 5. — *Mailles aléatoires et aléatoires stratifiées. Dans le cas aléatoire pur,* σ_N^2 *s'obtient en divisant par* N *la variance des échantillons dans* V. *Dans le cas aléatoire stratifié, et si le champ* V *est connu a priori, on divise par* N *la variance — plus petite — des échantillons dans leurs zones d'influence v. Si* V *n'est pas connu a priori, il apparaît un* effet de bordure, *qui se met en évidence en passant en transitif. Enfin, on compare les mailles régulières et aléatoires stratifiées, les premières étant toujours supérieures aux secondes lorsqu'elles sont adaptées.*

Paragraphe 6. — *Ce paragraphe est consacré au krigeage, c'est-à-dire à la détermination de la pondération pour laquelle la variance d'estimation est minimale. L'équation générale* (XII, 7,6) *s'obtient par les méthodes du calcul des variations. On établit un théorème de superposition important pour les applications : tout krigeage peut s'obtenir par superposition de krigeages ponctuels. On particularise ensuite au cas du krigeage continu le long de courbes (travaux miniers), et du krigeage discontinu par un nombre fini de prélèvements ponctuels. L'intérêt pratique du krigeage est surtout lié au fait qu'il permet d'éviter une erreur systématique dans l'estimation d'une zone favorable sélectionnée. Certaines particularités (effet d'écran, symétrie) permettent de réduire considérablement les calculs.*

1. — Le problème de l'estimation.

Dans un grand nombre d'applications, on est conduit à procéder à l'estimation de la valeur moyenne, pondérée ou non, d'une variable régionalisée dans un champ V, à partir des résultats d'un échantillonnage fragmentaire. Par exemple, on s'intéresse à la quantité

$$\text{(XII,1,1)} \qquad Z = \int_V p(x)\, f(x)\, dx$$

où $f(x)$ est une variable régionalisée, et $p(x)$ une fonction de pondération, de somme unité, nulle en dehors du champ V.

$$\text{(XII,1,2)} \qquad \int_{V'} p(x)\, dx = 1.$$

Cette quantité Z sera appelée, pour abréger le langage, teneur moyenne [pondérée par $p(x)$] du champ V, ou, plus brièvement, *teneur pondérée de* V. Pour procéder à l'estimation de Z, on dispose, par exemple, des valeurs numériques prises par la variable régionalisée sur un ensemble V', fini ou non, discontinu ou continu, de points x. Dans le cas où l'on

dispose seulement des valeurs numériques de la variable non ponctuelle $\overset{v}{\alpha} * f$, régularisée de f par une fonction de pondération ou de prélèvement α, par exemple si les données disponibles sont les teneurs d'échantillons non ponctuels de volume v, on se ramène au cas des prélèvements ponctuels en régularisant le demi-variogramme $\gamma(h)$, comme il a été indiqué au paragraphe (VIII,3). A l'aide de cet échantillonnage fragmentaire, et d'une deuxième fonction de pondération $\lambda(x)$ — de somme unité, et nulle à l'extérieur de V′, on forme *un estimateur*

$$\text{(XII,1,3)} \qquad Y = \int_{V'} \lambda(x) f(x)\, dx$$

dont la valeur numérique, expérimentalement connue, constitue une estimation de la valeur numérique, inconnue, de Z. Le problème de l'estimation comprend deux parties bien distinctes : le choix de l'estimateur Y lui-même, c'est-à-dire le choix de la fonction de pondération $\lambda(x)$, et la précision de cette estimation.

Dans la théorie des schémas intrinsèques, les quantités Z et Y sont interprêtées comme des intégrales stochastiques, c'est-à-dire comme des variables aléatoires. Sous réserve que la fonction de pondération $\lambda(x)$ ait été choisie de somme unité :

$$\text{(XII,1,4)} \qquad \int_{V'} \lambda(x)\, dx = 1$$

on sait que l'erreur $Y - Z$, commise en étendant à V la teneur Y de l'échantillonnage V′, peut se caractériser par une variance d'extension $D^2(Y - Z)$, calculable par les formules générales du chapitre VIII. Cette variance d'extension, que nous appellerons aussi *variance d'estimation* répond donc au deuxième problème posé, concernant la précision de l'estimation. Mais, naturellement, la valeur numérique de $D^2(Y - Z)$ dépend du choix que l'on fait de la fonction de pondération $\lambda(x)$, soumise à la condition (XII,1,4). Il est donc naturel de choisir, parmi toutes les fonctions $\lambda(x)$ possibles de somme unité et nulle en dehors de V′, celle qui conduit à la plus petite valeur de $D^2(Y - Z)$. Ainsi, le premier problème, qui est celui du choix de l'estimateur Y doit être résolu par les méthodes dites *de krigeage* [1], qui consistent à déterminer la fonction $\lambda(x)$ réalisant le minimum de la variance d'estimation. Ces méthodes seront exposées au paragraphe XII,6.

Dans beaucoup de cas, le recours au krigeage ne s'impose pas, et l'on peut se contenter d'une fonction $\lambda(x)$ simple, choisie a priori. Au prix d'une perte de précision le plus souvent négligeable, on évite ainsi des calculs longs et pénibles. Par exemple, supposons que l'on ait :

$$\text{(XII,1,5)} \qquad p(x) = \frac{1}{V} k(x)$$

$k(x)$ étant la variable géométrique associée au champ V. Dans ce cas, la

[1] Cette terminologie, d'origine géostatistique, fait allusion aux travaux de D. G. Krige sur les gisements d'or d'Afrique du Sud.

quantité Z à estimer est la teneur ordinaire (non pondérée) de V. Si l'on dispose d'un réseau de prélèvements ponctuels suffisamment nombreux, implantés, selon une maille régulière dans toute l'étendue de V, aux points $x_1, x_2 \ldots x_N$, il est tout à fait légitime, en général, de prendre l'estimateur

$$Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

qui est une simple moyenne arithmétique. Dans ce cas, la variance d'estimation doit se calculer, conformément à (VIII,3,12), par la formule :

$$(XII,1,5) \quad D^2(Y - Z) = \frac{2}{NV} \sum_i \int_V \gamma(x - x_i)\, dx - \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \gamma(x_i - x_j) - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x')\, dx\, dx'.$$

Naturellement, si N est grand, le calcul direct de l'expression (XII,1,5) serait assez pénible, et l'on est conduit à chercher des formules d'approximation. Ce sera l'objet des paragraphes 2 à 5. Mais, pour dégager de telles formules, on est contraint de distinguer plusieurs cas, selon la nature, régulière ou non, de la maille, et le caractère, préférentiel ou non, de l'implantation du réseau de prélèvements dans le champ géométrique V. Dans les applications pratiques, on peut, en général, se ramener à l'un ou l'autre des trois cas principaux suivants :

Mailles régulières à implantation préférentielle (1). — Très souvent, le champ géométrique V auquel on décide de s'intéresser est choisi au sein d'une régionalisation plus vaste au vu des résultats des prélèvements eux-mêmes. Ayant retenu, parmi tous les prélèvements, un nombre N d'entre eux considérés comme favorables, on définit le champ V comme la juxtaposition des zones d'influences des échantillons sélectionnés. Par construction, chaque prélèvement du réseau occupe dans sa zone d'influence une position préférentielle. Par exemple, à deux dimensions et pour une maille rectangulaire, le champ V est constitué des panneaux rectangulaires centrés sur les prélèvements retenus (dispositif centré), ou admettant ces prélèvements comme sommets (dispositif fermé) : les échantillons occupent, relativement à ces panneaux, une position soit centrale, soit périphérique, mais toujours préférentielle, et il y a un accord parfait entre la géométrie du réseau et celle du champ.

Mailles régulières à implantation flottante (2). — Souvent, aussi le champ V préexiste dans la nature et n'est pas choisi par l'homme. C'est en particulier le cas lorsque l'on s'intéresse à la totalité d'une régionalisation, et

(1) En Géostatistique, on dit aussi schéma de reconnaissance à champ flottant et implantation fixe.

(2) Terminologie géostatistique équivalente : schéma de reconnaissance à champ fixe et implantation flottante.

non plus à une portion sélectionnée à l'intérieur d'un champ plus vaste. En pareil cas, le champ V n'étant pas, en général, connu à priori, le réseau de prélèvements à maille régulière n'aura que peu de chances d'occuper la même position préférentielle que ci-dessus. Parmi les échantillons périphériques, les uns tomberont trop près des frontières du champ, et les autres trop loin. On pourra, en général, admettre que tout se passe comme si le réseau régulier avait été implanté, dans son ensemble, d'une manière aléatoire, ou encore, comme en transitif, comme si l'un quelconque des prélèvements, pris comme origine du réseau, était implanté au hasard dans le parallélépipède de maille.

Mailles aléatoires et aléatoires stratifiées. — Bien que ce ne soit pas, en général, une pratique très recommandable, il arrive parfois que les prélèvements soient implantés un peu n'importe où, et ne puissent pas se rattacher à un réseau régulier. Dans certains cas, tout se passe comme si chaque échantillon avait été implanté au hasard dans V, indépendamment des autres, et la maille est dite *aléatoire pure*. Plus souvent, sans s'astreindre à une maille régulière, on s'est efforcé cependant de maintenir dans V une « densité » de prélèvements à peu près constante. Dans ce cas, tout se passe à peu près comme si V avait été découpé en zones d'influence égales entre elles, et comme si un prélèvement avait été implanté au hasard dans chacune des zones d'influence indépendamment des autres. Dans ce cas, la maille est dite *aléatoire stratifiée*.

De ces trois types de maillle, le premier, qui est le plus important pour les applications, est aussi le plus difficile à traiter. Nous lui consacrerons les paragraphes 2 et 3, et les deux autres types seront ensuite examinés aux paragraphes 4 et 5. Le dernier paragraphe sera consacré aux méthodes générales de krigeage.

2. — Les mailles régulières à implantation préférentielle.

Une maille régulière est dite à implantation préférentielle lorsque le champ géométrique V est constitué par la réunion de N polyèdres v_i jointifs, tous égaux et translatés les uns des autres, appelés zones d'influence, et lorsque les points de prélèvements x_j sont implantés au centre des zones d'influence (*dispositif centré*) ou aux sommets des polyèdres v_j (*dispositif fermé*). Les prélèvements sont supposés ponctuels (puisqu'on peut toujours se ramener à ce cas en remplaçant $f(x)$ par une régularisée), et pour estimer la teneur moyenne de V :

$$Z = \frac{1}{V} \int_V f(x)\, dx$$

on forme la moyenne arithmétique des teneurs des N échantillons ponctuels disponibles

$$Y = \frac{1}{N} \sum_i f(x_i)$$

La variance d'estimation que nous désignerons par σ_N^2 est donnée par la formule générale (XII,1,5)

$$(\text{XII,2,1}) \quad \sigma_N^2 = D^2(Y - Z) = \frac{2}{NV}\sum_i \int_V \gamma(x - x_i)\, dx - \frac{1}{N^2}\sum_{ij} \gamma(x_i - x_j) - \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x - x')\, dx\, dx'.$$

Il faut bien voir que, dans le deuxième membre, la série double $\frac{1}{N^2}\sum_{ij}\gamma(x_i - x_j)$ apparaît comme une expression approchée du terme mixte $\frac{1}{NV}\Sigma\int_V \gamma(x - x_i)\, dx$ lequel est lui-même une expression approchée de l'intégrale double. Ainsi, la variance d'estimation apparaît comme une différence seconde de quantités très voisines les unes des autres, particulièrement difficile à calculer numériquement, par conséquent, pour peu que le nombre N des prélèvements soit un peu important. La formule (IV,1,12), qui donne la variance d'estimation en représentation transitive, est analogue à (XII,2,1), mais plus simple, puisqu'elle ne comporte qu'une différence première de deux quantités très voisines. Naturellement, cette analogie n'est pas fortuite, mais traduit une parenté profonde, et la plus grande complexité de la variance d'estimation intrinsèque est imputable au caractère préférentiel de l'implantation qui n'a pas d'équivalent dans l'estimation transitive. Pour élaborer des formules d'approximation, nous avons le choix entre deux principes très différents, dont l'un est une simple transposition des résultats obtenus au chapitre IV, tandis que le deuxième n'a pas et ne peut pas avoir d'équivalent en transitif.

Composition de termes de tranche et de termes de sections. — Dans le réseau des points de prélèvements x_i, il est aisé de distinguer des plans et des droites de plus grande densité. Raisonnons, par exemple, dans l'espace à 3 dimensions. En attribuant la teneur moyenne des prélèvements aux lignes de plus grande densité, celle des lignes, supposée connue, aux plans de plus grande densité, celle enfin des plans au champ V entier, on commet trois erreurs d'extension successives, qui doivent, naturellement, s'ajouter. Si ces trois erreurs ont des covariances nulles, la variance d'estimation résultante sera simplement la somme des trois variances d'extension correspondant à ces trois erreurs :

$$(\text{XII,2,2}) \qquad \sigma_N^2 = \sigma_{N_1}^2 + \sigma_{N_2}^2 + \sigma_{N_3}^2.$$

Les trois variances $\sigma_{N_1}^2$, $\sigma_{N_2}^2$, et $\sigma_{N_3}^2$ d'extension des points aux lignes, des lignes aux plans, et des plans au champ total portent, respectivement, les noms de *terme de ligne*, *terme de section* et *terme de tranche*.

Naturellement, le principe de composition exprimé en (XII,2,2) ne peut avoir de valeur que dans la mesure où les trois erreurs d'extension sont effectivement indépendantes, ou, du moins, peuvent être regardées comme

telles en première approximation. L'intuition suggère bien qu'il doit en être ainsi, du moins pour des fonctions intrinsèques n'ayant pas un comportement trop régulier à l'origine. Il est assez malaisé de le démontrer par le calcul, comme nous avions pu le faire, à l'aide de développements limités, dans le cas des représentation transitives. Mais l'analogie profonde des variances d'estimation transitive, et intrinsèque, telle qu'elle apparaît sur les formules générales (IV,1,12) et (XII,2,1) apporte un argument supplémentaire, et nous admettrons que le principe d'approximation (XII,2,2) est utilisable pour les fonctions intrinsèques usuelles.

L'intérêt majeur du principe de composition des termes de tranche et de sections est, évidemment, qu'il permet de ramener le calcul de toute variance d'estimation à une suite de problèmes ne comportant qu'une seule dimension. Il suffit, en fait, de savoir calculer les variances à une seule dimension pour en déduire toutes les autres par composition. Avant de passer aux règles explicites de calcul, il faut cependant examiner un deuxième principe d'approximation, très différent, mais également utile dans les applications.

Composition de variances d'extension élémentaires. — La formule générale (XII,2,1) peut être mise sous une autre forme dans le cas d'un dispositif centré. Désignons, en effet, par Z_i la teneur moyenne de la zone d'influence v_i au centre x_i de laquelle a été effectué le prélèvement ponctuel de teneur $f(x_i)$. La variance d'extension σ_E^2 de $f(x_i)$ et Z_i :

(XII,2,3)

$$\sigma_E^2 = D^2[Z_i - f(x_i)] = \frac{2}{v_i}\int_{v_i}\gamma(x - x_i)\,dx - \frac{1}{v_i^2}\int_{v_i}\int_{v_i}\gamma(x - x')\,dx\,dx'$$

sera dite *variance d'extension élémentaire* de l'échantillon x_i dans sa zone d'influence. L'erreur totale, commise dans l'estimation de Z, est égale à la moyenne arithmétique des erreurs ε_i commises dans l'estimation de chacune des zones d'influence v_i, puisque celles-ci ont le même volume :

$$Z - Y = \frac{1}{N}\sum_i [Z_i - f(x_i)] = \frac{1}{N}\Sigma\varepsilon_i.$$

En prenant la variance des deux membres, on obtient la formule suivante, équivalente à (XII,2,1) :

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N}\sigma_E^2 + \frac{2}{N^2}\sum_{i<j} E(\varepsilon_i\varepsilon_j). \qquad \text{(XII,2,4)}$$

Les termes $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)$ sont des covariances d'extension, et peuvent se calculer par les formules générales du chapitre VIII. Si, dans (XII,2,4), la somme de toutes ces covariances d'extension peut être considérée comme négligeable, il restera la formule très simple

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N}\sigma_E^2 \qquad \text{(XII,2,5)}$$

qui exprime un principe de composition des variances d'extension élémentaires, et suppose, naturellement, que l'on ait le droit de considérer comme indépendantes les erreurs commises en étendant à deux zones d'influence distinctes les teneurs des échantillons prélevés en leur centre.

Les deux principes d'approximation (XII,2,2) et (XII,2,5) sont manifestement incompatibles. Il faut choisir entre eux. En fait, dans le cas général, la somme des covariances d'extension qui figure en (XII,2,4) n'est pas négligeable. On s'en rend compte — et on peut le vérifier par le calcul — en imaginant, dans l'espace à 2 dimensions, une maille rectangulaire très allongée. Si x_i et x_j sont deux points de prélèvements voisins sur une même ligne de plus grande densité, ils sont trop proches l'un de l'autre, relativement à la longueur de leurs zones d'influence, pour être étendus à celles-ci indépendamment l'un de l'autre. En dehors de cas particuliers (fonction intrinsèque isotrope et maille cubique ou carrée, ou plus généralement fonction intrinsèque présentant une anisotropie géométrique et maille adaptée, c'est-à-dire présentant la même anisotropie que la fonction intrinsèque), la formule (XII,2,5) ne sera certainement pas utilisable.

On est ainsi conduit à *subordonner le principe de composition des variances d'extension élémentaires au principe de composition des termes de tranche et de section.* On appliquera en premier lieu la formule (XII,2,2), et c'est seulement dans le calcul des variances à une seule dimension telles que $\sigma^2_{\tilde{N}_1}$ que l'on pourra espérer utiliser (XII,2,5) : même à une seule dimension, comme nous allons le voir, la composition des variances d'extension est loin d'être toujours justifiée.

3. — Calcul des variances d'estimation.

D'après ce qui précède, il suffit de savoir calculer les variances d'estimation dans un espace *à une seule dimension.* Soient donc, dans l'espace à une seule dimension, $\gamma(h)$, $\chi(h)$ et $F(h)$ la fonction intrinsèque et les deux fonctions auxiliaires déjà introduites en (XI,3,1) :

$$\text{(XII,3,1)} \quad \begin{cases} \chi(h) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h \gamma(u)\,du, \\ F(h) = \dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h u\chi(u)\,du = \dfrac{2}{h^2}\int_0^h (h-u)\gamma(u)\,du. \end{cases}$$

Désignons par a la maille, et par N le nombre des points de prélèvements supposés implantés *au centre* de leur zone d'influence, aux points d'abscisse

$$x_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)a.$$

Le champ géométrique est, dans ce cas, constitué par le segment de droite (0, L), avec

$$L = Na.$$

On a ici :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^L \gamma(x - x_i)\,dx = x_i\chi(x_i) + (L - x_i)\chi(L - x_i) \\ \displaystyle\frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h \gamma(x - x')\,dx\,dx' = F(h) \end{cases}$$

de sorte que la formule générale (XII,2,1) prend la forme suivante :

$$(XII,3,2)\quad \sigma_N^2 = \frac{4}{NL}\sum_i x_i\chi(x_i) - F(L) - \frac{1}{N^2}\sum_{ij}\gamma(x_i - x_j)$$

Pour ordonner cette expression, on peut remarquer que l'on a :

$$\frac{1}{N^2}\sum_{ij}\gamma(x_i - x_j) = \frac{2}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}(N - k)\gamma(ka)$$

et utiliser, pour F(L), les deux expressions équivalentes écrites en (XII,3,1). On obtient ainsi :

$$(XII,3,3)\quad \begin{cases} \sigma_N^2 = \dfrac{4}{NL}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i\chi(x_i) - \frac{4}{L^2}\int_0^L x\chi(x)\,dx \\ \qquad\qquad + \dfrac{2}{L^2}\displaystyle\int_0^L (L - x)\gamma(x)\,dx - \frac{2}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}(N - k)\gamma(ka). \end{cases}$$

Ainsi la variance d'estimation est la somme de deux restes du type d'Euler Mac Laurin, égaux aux erreurs commises dans le calcul numérique approché de deux intégrales simples. Il est plus commode, d'ailleurs, de séparer les termes en $\frac{1}{N}$ ou en $\frac{1}{L}$ et les termes en $\frac{1}{N^2}$ ou $\frac{1}{L^2}$, ce qui donne la décomposition suivante

$$(XII,3,4)\quad \begin{cases} \sigma_N^2 = T_1 + T_2 \\ T_1 = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L \gamma(x)\,dx \\ \qquad - \dfrac{2a}{L}\left[\gamma(a) + \gamma(2a) + \cdots + \gamma[(N-1)]a + \frac{1}{2}\gamma(Na)\right] \\ T_2 = \dfrac{4a}{L^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i\chi(x_i) - \frac{4}{L^2}\int_0^L x\chi(x)\,dx - \frac{2}{L^2}\int_0^L x\gamma(x)\,dx \\ \qquad + \dfrac{2a}{L^2}\Big[a\gamma(a) + 2a\gamma(2a) + \cdots + (N-1)a\gamma[(N-1)a] \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}Na\gamma(Na)\Big] \end{cases}$$

Les deux termes T_1 et T_2 se traitent de la même manière et vérifient les mêmes propriétés. Pour éviter des complications d'écriture, nous n'examinerons en détail que le plus simple d'entre eux, qui est T_1. La méthode,

exactement comme dans le chapitre IV, va consister à transformer l'expression de T_1, différence entre la valeur exacte et la valeur approchée d'une même intégrale, à l'aide de la formule d'Euler-Mac Laurin (IV,2,1). Naturellement, comme $\gamma(h)$ présente en général des singularités à l'origine, cette formule n'est pas utilisable sur tout l'intervale (0, L), mais seulement sur un intervalle tel que (a, L). Comme, d'ailleurs, $\gamma(0)$ est nul, nous écrirons :

$$T_1 = \frac{2}{L}\int_0^a \gamma(x)\,dx - \frac{a}{L}\gamma(a)$$
$$+ \frac{2}{L}\left[\int_a^L \gamma(x)\,dx - \frac{a}{2}\gamma(a) - a\gamma(2a) - \cdots - a\gamma[(N-1)a] - \frac{a}{2}\gamma(Na)\right].$$

Nous supposerons que $\gamma(x)$ possède les conditions de continuité et de dérivabilité requises sur l'intervalle (a, L) pour transformer, à l'aide de la formule d'Euler Mac Laurin, le terme qui figure entre crochets. On obtient ainsi :

$$\text{(XII,3,5)} \quad T_1 = \frac{2}{L}\int_0^a \gamma(x)\,dx - \frac{a}{L}\gamma(a) + \frac{2}{L}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p \frac{B_{2p}a^{2p}}{(2p)!}$$
$$[\gamma^{(2p-1)}(L) - \gamma^{(2p-1)}(a)].$$

En général, (XII,3,5) devra être considéré comme un développement limité plutôt que comme une série entière. Les termes qui y figurent sont de deux espèces différentes. Les premiers, qui comprennent l'intégrale $\int_0^a \gamma(x)\,dx$ et les dérivées impaires $\gamma^{2p-1}(a)$ prises au point a, ne font intervenir que les valeurs prises par la fonction intrinsèque dans l'intervalle $(0, a)$. Ils sont l'équivalent exact du terme d'extension $T_0(a)$ de la formule (IV,2,5). Les autres, au contraire, ne font intervenir que les valeurs prises par les dérivées impaires $\gamma^{(2p-1)}(L)$ en $L = na$, et correspondent au terme de *Zitterbewegung* $T_Z(a)$ de (IV,2,5). Ils seront toujours négligés, comme dans le cas transitif, mais avec davantage de raisons, car les $\gamma(h)$ usuels, fonctions croissantes de h, ont le plus souvent une croissance qui va en se ralentissant pour les grandes valeurs de h, de sorte que les dérivées en $L = Na$ sont négligeable devant les dérivées en a, dès que N n'est pas très petit.

Si la fonction intrinsèque $\gamma(h)$ admet un développement limité de la forme

$$\text{(XII,3,6)} \qquad \gamma(h) = \Sigma C_\lambda |h|^\lambda$$

utilisable jusqu'en $h = a$, chacune des composantes en h^λ apporte au terme T_1 (Zitterbewegung exclu) sa contribution $T_1(h^\lambda)$, qui est de la forme :

$$\text{(XII,3,7)} \qquad T_1(h^\lambda) = \frac{1}{N} R_\lambda a^\lambda$$

R_λ étant un coefficient indépendant de N et de a, comme on le voit facilement en remplaçant $\gamma(h)$ par h^λ dans (XII,3,5)

De la même manière, on verrait que chacune des composantes en h^λ apporte au terme T_2 de (XII,3,4), exclusion faite, ici aussi, d'un Zitterbewegung, une contribution :

$$\text{(XII,3,8)} \qquad T_2(h^\lambda) = \frac{1}{N^2} R'_\lambda a^\lambda$$

où R'_λ est un coefficient indépendant de N et de a.

Ainsi, *lorsque le développement* (XII,3,6) *est utilisable jusqu'en* $h = a$, *c'est-à-dire pour les distances* h *inférieures ou égales à la maille* a, *on peut obtenir un développement limité de la variance d'estimation valable autour de* $a = 0$, *en appliquant terme à terme le principe de correspondance* suivant :

$$\text{(XII,3,9)} \quad \sigma_N^2 = \sum_\lambda C_\lambda [T_1(h^\lambda) + T_2(h^\lambda)] = \frac{1}{N} \Sigma C_\lambda R_\lambda a^\lambda + \frac{1}{N^2} \Sigma C_\lambda R'_\lambda a^\lambda.$$

Nous procéderons, dans un instant, au calcul effectif des coefficients R_λ et R'_λ qui figurent dans la règle de correspondance (XII,3,9). Mais il faut, auparavant, examiner ce qui se passe si le développement (XII,3,6) n'est pas utilisable jusqu'en $h = a$. Cette circonstance se produit fréquemment lorsque a n'est pas très petit. Nous en avons rencontré un exemple au chapitre XI. La fonction intrinsèque $\gamma_\lambda(r)$, qui se déduit de r^λ par montée d'ordre 1, admet l'un ou l'autre des développements très différents (XI,2,6) et (XI,2,8) selon que la distance r est supérieure ou inférieure à la puissance l de la montée :

Pour une maille a supérieure à la puissance l, le développement (XI,2,8) n'est pas utilisable jusqu'en $h = a$, et par suite la règle de correspondance ne peut pas être appliquée sous la forme (XII,3,9).

En pareil cas, la solution consiste à utiliser le principe d'approximation (XII,2,5), c'est-à-dire *le principe de composition des variances d'extension* élémentaires. Comme la fonction intrinsèque a changé d'allure dans l'intervalle $(0, a)$, on s'attend bien à ce que les covariances d'extension $E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$ soient négligeables, c'est-à-dire à ce que chaque prélèvement s'étende indépendamment des autres à sa zone d'influence de longueur a. De fait en utilisant les fonctions auxiliaires (XII,3,1) et en posant :

$$u = |i - j|a$$

la formule générale (VIII,3,14) permet de calculer $E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$. On trouve :

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = -\gamma(u) + \frac{2}{a}\left[\left(u + \frac{a}{2}\right)\chi\left(u + \frac{a}{2}\right) - \left(u - \frac{a}{2}\right)\chi\left(u - \frac{a}{2}\right)\right]$$
$$- \frac{1}{2a^2}[(u+a)^2 F(u+a) - 2u^2 F(u) + (u-a)^2 F(u-a)].$$

On voit apparaître les différences première et seconde des fonctions $u\chi(u)$ et $u^2F(u)$ prises autour de $u = |i - j|a$, valeur supérieure ou égale à a. Le plus souvent, $\gamma(h)$ admet un développement limité ou même un développement en série entière autour de $h = u$ (c'est une conséquence

du fait très général que les singularités analytiques d'un $\gamma(h)$ sont localisées au voisinage de l'origine). Dans ces conditions, $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)$ admet elle-même un développement limité, ou en série entière, dont l'expression s'obtient sans peine :

$$(XII,3,10) \quad E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(2k+2)!}\left[2 - \frac{k+1}{2^{2k-2}}\right]\gamma^{(2k)}(u).$$

On vérifie que le terme en a^2, correspondant à $k = 1$, a un coefficient nul, de sorte que le développement (XII,3,10) commence par le terme $\frac{1}{576}a^4\gamma^{(4)}(u)$, qui est du quatrième ordre en a. D'autre part, u est supérieur ou égal à a, et en $h = a$ le demi-variogramme, qui a déjà changé d'allure analytique par hypothèse, est entré, en général, dans la zone de croissance ralentie, de sorte que les dérivées quatrième sont elle-mêmes très petites. On ne peut d'ailleurs pas en déduire que $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)$ est toujours négligeable. En particulier, pour un $\gamma(h)$ très régulier au voisinage de l'origine, admettant, par exemple, un comportement en h^4 ou h^5 autour de $h = 0$, il se pourrait très bien que les covariances $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)$ soient du même ordre de grandeur que la variance d'extension élémentaire σ_E^2. Dans la plupart des applications, cependant, $\gamma(h)$ ne possède pas une régularité aussi élevée à l'origine, et les $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)$ peuvent effectivement être négligées.

Règle pratique. — En résumé, nous obtenons *la règle pratique* suivante pour le calcul des variances d'estimation à une seule dimension :

Si la fonction intrinsèque $\gamma(h)$ *admet un développement limité* de la forme :

$$(XII,3,11) \qquad \gamma(h) = \Sigma C_\lambda h^\lambda$$

valable jusqu'aux distances h *égales à la maille* a, *on obtient un développement limité en* a *de la variance d'estimation en appliquant le principe de correspondance terme à terme*

$$(XII,3,12) \qquad \sigma_N^2 = \frac{1}{N}\sum_\lambda C_\lambda R_\lambda a^\lambda + \frac{1}{N^2}\sum_\lambda C_\lambda R'_\lambda a^\lambda$$

Si, au contraire, le développement (XII,3,11) *n'est pas utilisable jusqu'en* $h = a$, *on appliquera le principe de composition des variances d'extension élémentaires* :

$$(XII,3,13) \qquad \sigma_N^2 = \frac{1}{N}\sigma_E^2 = \frac{1}{N}\left[2\chi\left(\frac{a}{2}\right) - F(a)\right].$$

Il reste à calculer les valeurs numériques des coefficients R_λ et R'_λ de la règle de correspondance (XII,3,12).

Forme explicite de la règle de correspondance. — Pour établir la règle de correspondance, nous utiliserons comme nous l'avons déjà fait dans le

cas transitif, un $\gamma(h)$ particulier, présentant un terme en h^λ, et nous procéderons par identification. Prenons, par exemple :

$$\text{(XII,3,14)} \quad \gamma(x) = \int_1^\infty (1 - e^{-ux}) \frac{u^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)}\, du = -x^\lambda + \Phi(x).$$

On peut vérifier, à l'aide de la Formule (D, 13) de l'Annexe D, que $\Phi(x)$ est une série entière en x, de sorte que la fonction $\gamma(x)$ définie en (XII,3,14) contient le terme $-x^\lambda$ comme seul terme à exposant non entier dans son développement autour de l'origine (le cas où λ est un entier se traitera sans peine par passage à la limite).

Comme ce $\gamma(x)$ est obtenu par superposition de fonctions de la forme $(1 - e^{-ux})$, nous examinerons en premier lieu le cas particulier très simple où l'on a :

$$\text{(XII,3,15)} \qquad \gamma(x) = 1 - e^{-ux}.$$

Le calcul des termes T_1 et T_2 des relations (XII,3,4) n'offre pas de difficultés particulières pour le $\gamma(x)$ exponentiel (XII,3,15). On trouve pour T_1 :

$$T_1 = \frac{1 - e^{-uL}}{N}\left[\frac{2}{1 - e^{-ua}} - 1 - \frac{2}{ua}\right]$$

La présence du Zitterbewegung se manifeste par les termes en e^{-uL}, effectivement très petits, pour peu que $uL = uNa$ soit grand. Nous les négligerons. Après exclusion du Zitterbewegung, T_1 prend l'expression suivante :

$$\text{(XII,3,16)} \qquad T_1 = \frac{1}{N}\left[\frac{2}{1 - e^{-ua}} - 1 - \frac{2}{ua}\right] = \frac{1}{N}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kua} - \frac{2}{a}\int_0^\infty e^{-ux}\, dx\right],$$

L'expression de T_1 rappelle étroitement celle d'une variance d'estimation transitive. Désignons, en effet, par $\mathcal{E}_a$ l'opérateur linéaire qui, à tout covariogramme transitif $g(h)$ associe la variance d'estimation transitive $\sigma^2(a)$ selon la formule (IV,2,2) :

$$\text{(XII,3,17)} \quad \mathcal{E}_a(g) = ag(0) + 2a\sum_{k=1}^{\infty} g(ka) - 2\int_0^\infty g(h)\, dh$$

En comparant à (XII,3,16), on obtient sans difficulté :

$$\text{(XII,3,18)} \qquad T_1 = \frac{1}{aN}\,\mathcal{E}_a(e^{-ux})$$

La formule (XII,3,18) résoud le problème dans le cas du demi-variogramme exponentiel $1 - e^{-ux}$. Pour une fonction intrinsèque de la forme générale (XII,3,14), on doit multiplier les expressions de T_1 et T_2 par la fonction de pondération $\frac{u^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)}$, et intégrer en u de l à

l'infini. Mais cette intégration, qui intéresse la variable u, et le symbole $\mathcal{E}_a$, qui n'agit que sur la variable a, peuvent être intervertis. Posant alors :

$$g_\lambda(x) = \int_1^\infty \frac{u^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)} e^{-ux}\, du = \gamma(0) - \gamma(x)$$

nous obtenons T_1 sous la forme :

$$T_1 = \frac{1}{aN}\mathcal{E}_a(g_\lambda) \qquad \text{(XII,3,19)}$$

D'après (XII,3,14), g_λ possède, dans son développement autour de l'origine, un terme x^λ, seul de son espèce, et une série entière en x. A ce terme unique correspond, selon la règle (IV,2,8), le terme $T_\lambda a^{1+\lambda}$ dans $\mathcal{E}_a(g_\lambda)$, le coefficient T_λ étant déterminé par (IV,2,9) :

$$T_\lambda = -2 \sin\frac{\lambda\pi}{2}\frac{B_{1+\lambda}}{1+\lambda}$$

Par suite, au terme $-x^\lambda$ du $\gamma(x)$ de (XII,3,14) correspond le terme suivant, dans le développement de la variance d'estimation intrinsèque :

$$T_1(-x^\lambda) = \frac{1}{N} T_\lambda a^\lambda$$

On remarque ensuite que, selon (XII,3,4), T_2 se déduit de $2x\chi(x) - x\gamma(x)$ də la même manière que T_1 de $\gamma(x($. Au terme x^λ dans $\gamma(x)$ correspond le terme $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}x^{1+\lambda}$ dans $2x\chi(x) - x\gamma(x)$. D'où :

$$T_2(-x^\lambda) = \frac{1}{N^2}\frac{1-\lambda}{1+\lambda} T_{\lambda+1} a^\lambda.$$

En changeant les signes, et en remplaçant T_λ par sa valeur, nous obtenons la forme explicite de la règle de correspondance intrinsèque (XII,3,9) :

$$\text{(XII,3,20)} \quad \begin{cases} T_1(h^\lambda) = \dfrac{1}{N} 2 \sin\dfrac{\lambda\pi}{2}\dfrac{B_{1+\lambda}}{1+\lambda} a^\lambda \\ T_2(h^\lambda) = \dfrac{1}{N^2}\dfrac{1-\lambda}{(1+\lambda)(2+\lambda)} 2\cos\dfrac{\lambda\pi}{2} B_{2+\lambda} a^\lambda \end{cases}$$

Ainsi, en intrinsèque, la variance d'estimation comporte un terme principal en $\frac{1}{N}$ qui se calcule exactement comme en transitif, et un terme en $\frac{1}{N^2}$ qui n'a pas d'équivalent transitif : l'apparition de ce terme supplémentaire en $\frac{1}{N^2}$ doit être rapprochée du phénomène observé, au chapitre XI, pour la montée de r^λ : à côté du terme $\dfrac{\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\dfrac{\sqrt{\pi}\, r^{1+\lambda}}{l}$, équivalent

exact du résultat de la montée transitive, apparaît un terme supplémentaire, d'ordre supérieur, en $\frac{r^{2+\lambda}}{l^2}$. Dans un cas comme dans l'autre, ce terme supplémentaire est lié au caractère fini des opérations intrinsèques (montée sous puissance finie, sommation sur un nombre N fini d'échantillons). Pour N ou l très grand, ce terme devient négligeable, et l'on retombe, asymptotiquement, sur les formules transitives.

Dans les applications, λ sera le plus souvent un entier, pair ou impair, et on s'intéressera aussi aux termes en $x^{2k} \log x$.

Cas* $\lambda = 2k$, *entier pair. — Si λ est un entier pair, T_1 est identiquement nul, comme en transitif, mais T_2 est différent de zéro

$$\text{(XII,3,21)} \qquad \begin{cases} T_1(x^{2k}) = 0, \\ T_2(x^{2k}) = \dfrac{1}{N^2} \dfrac{(-1)^{k+1}(2k-1)}{(2k+1)(k+1)} B_{2+2k} a^{2k}. \end{cases}$$

Ainsi, une fonction intrinsèque $\gamma(h)$ très régulière à l'origine, c'est-à-dire ne comportant que des termes entiers pairs en x^{2k}, ne conduit pas, comme en transitif, à une variance d'estimation identiquement nulle, mais seulement à une variance en $\frac{a^{2k}}{N}$.

Cas* $\lambda = 2k-1$, *entier impair. — Dans ce cas, on observe la circonstance inverse : T_2 est identiquement nul, mais non pas T_1

$$\text{(XII,3,22)} \qquad \begin{cases} T_1(x^{2k-1}) = \dfrac{1}{N} \dfrac{(-1)^{k+1} B_{2k}}{k} a^{2k-1}. \\ T_2(x^{2k-1}) = 0 \end{cases}$$

Cas d'un terme logarithmique* x^{2k} *log x. — Ce cas se traite sans difficulté, en dérivant (XII,3,20) par rapport à λ et en faisant ensuite $\lambda = 2k$. Seul le terme T_1 admet une expression simple :

$$\text{(XII,3,23)} \quad T_1(x^{2k} \log x) = \frac{(-1)^k}{N} \frac{\pi}{1+2k} B_{1+2k} a^{2k}.$$

Remarque. — Dans les applications, on négligera le plus souvent le terme T_2. En effet, si N est grand, T_2, qui est en $\frac{1}{N^2}$, est petit devant T_1. Naturellement, si N est petit, cette approximation pourrait n'être pas légitime. Mais il faut bien voir que des formules telles que (XII,3,20) sont elles-mêmes approchées, puisqu'elles ne tiennent pas compte du Zitterbewegung, et que celui-ci n'est, en réalité, négligeable que si N n'est pas trop petit. Dans le cas particulier où N = 1, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a qu'*un seul échantillon* implanté au centre d'un segment de longueur a, la variance d'estimation coïncide avec la variance d'extension élémentaire σ_E^2 définie par

$$\sigma_E^2 = 2\chi\left(\frac{a}{2}\right) - F(a).$$

Dans ce cas particulier, le principe de correspondance prend la forme suivante

$$\text{(XII,3,24)} \qquad T(x^\lambda) = \left[\frac{2^{1-\lambda}}{\lambda+1} - \frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\right] a^\lambda$$

très différente de (XII,3,20). Le cas difficile est celui où N, sans être égal à 1, est cependant trop petit pour que le Zitterbewegung soit négligeable (N = 3 ou 4, par exemple). Dans ce cas, on peut faire des calculs directs sur la formule générale (XII,3,2), soit, plus simplement, se contenter, en première approximation du principe de composition des variances d'extension, c'est-à-dire (XII,3,13), pourvu que λ ne soit pas trop élevé.

Cas du dispositif fermé. — Les formules ci-dessus s'appliquent à un dispositif centré, dans lequel le champ L à estimer est la somme des N segments d'influence de longueur a, au centre de chacun desquels un prélèvement a été implanté. En pratique, on a souvent affaire à un dispositif différent, appelé *dispositif fermé* dans lequel le champ à estimer est le segment L compris entre le premier et le dernier échantillon prélevé. Soient a la maille et $N+1$ le nombre des prélèvements, implantés aux points d'abscisse

$$x_i = ia \quad (i = 0,1 \ldots N).$$

Dans ce cas, comme les prélèvements x_0 et x_N ne commandent qu'une demi zone d'influence, on prend comme estimateur Y l'expression

$$Y = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{N-1}) + \frac{1}{2} f(x_N)\right].$$

La variance d'estimation, que nous désignerons encore par σ_N^2 bien qu'il y ait en réalité $N+1$ prélèvements, est donnée par la formule générale suivante, analogue à (XII,3,2)

$$\text{(XII,3,25)} \quad \sigma_N^2 = \frac{4}{N^2}\left[\sum_{k=1}^{N-1} k\chi(ka) + \frac{1}{2} N\chi(Na)\right] - \frac{1}{N^2}\left[2\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)\gamma(ka) + \frac{1}{2}\gamma(Na)\right] - F(na).$$

On peut, à partir de cette formule, dégager les mêmes principes d'approximation que dans le cas du dispositif centré. En particulier, on obtient la règle de correspondance sous la forme suivante :

$$\text{(XII,3,26)} \quad \begin{cases} T_1(x^\lambda) = \dfrac{1}{N} 2 \sin\dfrac{\lambda\pi}{2} \dfrac{B_{1+\lambda}}{1+\lambda} a^\lambda \\ T_2(x^\lambda) = -\dfrac{1}{N^2} 2 \cos\dfrac{\pi\lambda}{2} \dfrac{\lambda+3}{(\lambda+1)(\lambda+2)} B_{2+\lambda} a^\lambda. \end{cases}$$

Le terme en $\frac{1}{N}$ est identique à celui que l'on obtient pour le dispo-

sitif centré. Comme le terme en $\frac{1}{N^2}$ est habituellement négligé, on obtient la règle pratique suivante :

La variance d'estimation d'un dispositif fermé à $N + 1$ *échantillons se calcule comme celle du dispositif centré à* N *échantillons admettant même maille* a *et même champ* $L = Na$.

Cette règle peut être appliquée, en pratique, même si N est petit (mais supérieur à 1), et même si le développement limité de $\gamma(h)$ n'est pas utilisable jusqu'à $h = a$: dans ce dernier cas, on aura

$$\text{(XII,3,27)} \qquad \sigma_N^2 = \frac{1}{N}\sigma_E^2 = \frac{1}{N}\left[2\chi\left(\frac{a}{2}\right) - F(a)\right]$$

σ_E^2 étant la variance d'extension élémentaire du dispositif centré de même maille.

Le seul cas d'exception, pratiquement, est celui où l'on a $N = 1$, c'est-à-dire le cas où l'on veut estimer un segment de longueur a à l'aide de deux échantillons implantés à ses deux extrémités. Dans ce cas, la formule générale (XII,3,25) prend la forme très simple

$$\text{(XII,3,28)} \qquad \sigma_1^2 = \sigma_F^2 = 2\chi(a) - \frac{1}{2}\gamma(a) - F(a).$$

L'expression (XII,3,28) peut être appelée variance d'extension élémentaire du dispositif fermé σ_F^2, et on se gardera bien de la confondre avec celle du dispositif centré, désignée ci-dessus par σ_E^2. Lorsque l'on applique le principe de composition des variances d'extension à un dispositif fermé, c'est toujours la variance σ_E^2 du dispositif centré, et non pas celle du dispositif fermé, qui doit être divisée par N (nombre des échantillons moins 1), conformément à (XII,3,27).

4. — Maille régulière à implantation flottante.

Supposons que, dans un champ fini V à l'intérieur duquel règne un schéma intrinsèque $f(x)$ (la variable $f(x)$ sera conventionnellement, supposée nulle à l'extérieur de V), un réseau régulier de prélèvements ait été implanté d'une manière quelconque, c'est-à-dire sans tenir compte de la géométrie du champ. Comme $f(x)$ est supposée nulle à l'extérieur de V, on peut supposer le réseau infini, et admettre que l'un des prélèvements, choisi comme origine du réseau, a été implanté en un point u choisi au hasard dans le parrallélépipède de base de la maille. Tous les autres prélèvements sont alors effectués aux points

$$x_k = u + ka = (u_1 + k_1a_1,\ u_2 + k_2a_2 \ldots,\ u_n + k_na_n),\ a = (a_1 \ldots a_n)$$

représentant la maille, et $k = (k_1 \ldots k_n)$ étant un système d'entiers quelconques. On voit que le dispositif ainsi schématisé ne diffère pas de

celui qui a été utilisé au chapitre IV pour la théorie de l'estimation transitive. Cette remarque permet de résoudre facilement le problème intrinsèque correspondant.

Désignons par $K(h)$ le covariogramme géométrique affecté au champ V. En représentation transitive, le covariogramme $g(h)$ de la variable régionalisée $f(x)$ limitée au champ V, peut se déduire (en valeur probable) de la fonction intrinsèque $\gamma(h)$, à l'aide de la relation (VIII,5,10) :

$$g(h) = [m^2 + \sigma^2(0|V)]K(h) - K(h)\gamma(h) \qquad \text{(XII,4,1)}$$

L'arreur commise sur l'estimation de la quantité de métal

$$Q = \int_V f(x)\, dx$$

est caractérisée par une variance d'estimation transitive, que nous désignerons par σ_Q^2, et qui se calcule en appliquant à $g(h)$ l'opérateur $\mathcal{E}_a$ défini en (XII,3,17) :

$$\sigma_Q^2 = [m^2 + \sigma^2(0|V)]\mathcal{E}_a(K) - \mathcal{E}_a(K\gamma). \qquad \text{(XII,4,2)}$$

On a vu, au chapitre IV, comment devait se conduire le calcul d'une telle variance. On remarquera de plus, sur (XII,4,2), que $\mathcal{E}_a(K)$ n'est pas autre chose que la variance d'estimation transitive du volume du champ V, estimé à partir du même réseau de prélèvement. Cette variance $\mathcal{E}_a(K)$ est aussi appelée *variance géométrique* σ_V^2

$$\sigma_V^2 = \mathcal{E}_a(K). \qquad \text{(XII,4,3)}$$

En portant dans (XII,4,2), on obtient, entre la variance géométrique et celle de la quantité de métal, la relation :

$$\sigma_Q^2 = [m^2 + \sigma^2(0|V)]\sigma_V^2 - \mathcal{E}_a(K\gamma). \qquad \text{(XII,4,4)}$$

En ce qui concerne la teneur moyenne $m = \frac{Q}{V}$, elle est estimée avec une erreur relative de variance $\frac{\sigma_m^2}{m^2}$. Mais la variable régionalisée $f(x)$ doit être considérée comme indépendante de son champ, au sens de l'indépendance interne (V,3,1), puisque précisément cette indépendance interne est une condition nécessaire pour que la description de $f(x)$ par un schéma intrinsèque soit possible. Par suite, d'après (V,2,6), on a

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma_Q^2}{Q^2} - \frac{\sigma_V}{V^2}.$$

Cette relation exprime, on le sait, que volume et teneur moyenne sont estimés indépendamment l'un de l'autre. Remplaçant σ_Q^2 par son expression (XII,4,4), tenant compte de la relation évidente $Q = mV$, et en désignant par $\sigma^2 = \sigma^2(0|V)$ la variance de $f(x)$ dans V, on obtient finalement

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma^2}{m^2}\frac{\sigma_V^2}{V^2} - \mathcal{E}_a\left(\frac{K\gamma}{Q^2}\right) \qquad \text{(XII,4,5)}$$

Si le champ V est exactement connu, le terme $\frac{\sigma^2}{m^2}\frac{\sigma_V^2}{V^2}$, qui représente la répercussion de l'erreur géométrique sur l'estimation de la teneur, doit être annulé, et il reste alors simplement :

$$\text{(XII,4,6)} \qquad \sigma_m^2 = -\mathcal{E}_a\left(\frac{K\gamma}{V^2}\right).$$

La variance d'estimation intrinsèque se calcule comme une variance d'estimation transitive pour le covariogramme $-\frac{K}{V^2}\gamma$. En général, cependant, V n'est pas connu a priori, et on doit ajouter le terme géométrique supplémentaire $\frac{\sigma^2}{m^2}\frac{\sigma_V^2}{V^2}$ de la formule (XII,4,5).

On n'oubliera pas que ces formules (XII,4,5) et (XII,4,6) ne sont valables que si $f(x)$ est indépendante de son champ, au sens de l'indépendance interne, c'est-à-dire pratiquement en l'absence de dérive zonée : c'est d'ailleurs dans ce cas seulement que la théorie intrinsèque peut être utilisée. Si la variable n'est pas indépendante de son champ, on doit recourir à la représentation transitive des corégionalisations exposée au chapitre v.

Comparaison entre les implantations flottante et préférentielle. — Supposons que K et γ soient toutes deux isotropes, et que — pour la maille utilisée — γ admette un développement limité comportant un terme principal r^λ. Le covariogramme géométrique de V, de son côté, peut se mettre sous la forme :

$$K(r) = V - Sr + \cdots$$

conformément à la formule (VI,15), et ce développement limité conserve sa valeur jusqu'à $r = |a|$, pourvu que le contour de V ne possède pas d'irrégularités importantes (micro-protubérances) de dimensions petites relativement à la maille.

On a alors :

$$-\frac{K\gamma}{V^2} = -\frac{\gamma}{V} + \frac{S}{V^2}r\gamma + \cdots = -\frac{r^\lambda}{V} + \frac{S}{V^2}r^{\lambda+1} + \cdots$$

La partie principale de $-\frac{K\gamma}{V^2}$ est $-\frac{r^\lambda}{V}$. On en déduit facilement que la variance σ_m^2 de (XII,4,6) a même partie principale que la variance d'estimation calculée, pour la même maille, dans l'hyopthèse d'une implantation préférentielle. Par conséquent, ces deux variances diffèrent, pour l'essentiel, uniquement à cause du terme géométrique $\frac{\sigma^2}{m^2}\frac{\sigma_V^2}{V^2}$. Ce terme traduit un *effet de bordure*, et atteste que l'erreur commise sur l'estimation du volume V se répercute sur la teneur moyenne, même dans l'hypothèse, admise ici, où la variable régionalisée est indépendante de son champ.

5. — Mailles aléatoires et aléatoires stratifiées.

La *maille aléatoire pure* correspond au cas où les N prélèvements sont implantés au hasard, indépendamment les uns des autres, dans le champ V à estimer, selon une loi de probabilité uniformément répartie dans V. La variance d'estimation associée à l'estimateur

$$Y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

où les x_i sont les points de prélèvements tirés au sort, est égale à la valeur probable, relativement à ce tirage au sort, de la variance $D^2(Y - Z)$ de la formule générale (XII,2,1). Dans le tirage au sort du point x_i, $\gamma(x - x_i)$ a pour valeur probable $\frac{1}{V}\int_V \gamma(x - x_i)\, dx_i$, de sorte que l'on obtient immédiatement :

$$E\left[\frac{2}{NV}\sum_i \int_V \gamma(x - x_i)\, dx\right] = \frac{2}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x - x')\, dx\, dx'$$

En ce qui concerne $\gamma(x_i - x_j)$, on a :

$$\begin{cases} E[\gamma(x_i - x_j)] = \dfrac{1}{V^2}\displaystyle\int_V\int_V \gamma(x - x')\, dx\, dx' & \text{pour} \quad i \neq j \\ E[\gamma(x_i - x_i)] = 0 \end{cases}$$

D'où, l'on tire aisément :

$$\sigma_N^2 = E[D^2(Y - Z)] = \left[2 - \frac{N(N-1)}{N^2} - 1\right]\frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x - x')\, dx\, dx'$$

et finalement :

$$(XII,5,1) \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N}\frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x - x')\, dx\, dx' = \frac{1}{N}\sigma^2(0|V)$$

La variance d'estimation d'une maille aléatoire s'obtient en divisant par le nombre N *des échantillons la variance dans* V *de la variable ponctuelle.* Ce résultat est bien conforme à ce que l'on pouvait prévoir, puisque les $f(x_i)$ — relativement au tirage au sort des x_i — sont des variables aléatoires indépendantes de variance $\sigma^2(0|V)$.

Dans une *maille aléatoire stratifiée* le champ V à estimer est découpé en zones d'influence v_i égales entre elles et translatées les unes des autres, et dans chaque v_i on implante au hasard un prélèvement au point x_i. On doit distinguer, cependant, deux cas différents selon que V est, ou non, connu a priori.

Si V *est connu* a priori, on peut, en général, admettre qu'il coïncide avec la réunion des zones d'influence v_i, de sorte qu'aucune des v_i ne

déborde les frontières de V. La variance d'estimation, dans ce cas, s'obtient en prenant la valeur probable de la formule générale (XII,2,1) relativement à l'implantation aléatoire de chaque x_i dans sa zone d'influence v_i. Mais on a :

$$E\left[\frac{1}{N}\sum_i \gamma(x-x_i)\right] = \frac{1}{N}\sum_i \frac{1}{v_i}\int_{v_i}\gamma(x-x_i)\,dx_i = \frac{1}{V}\int_V \gamma(x-x')\,dx'$$

de sorte que le premier terme de (XII,2,1) donne, en valeur probable :

$$E\left[\frac{2}{NV}\sum_i \int_V \gamma(x-x_i)\,dx\right] = \frac{2}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x-x')\,dx\,dx'.$$

En ce qui concerne le deuxième terme, la somme double doit, en réalité, être étendue aux indices $i \neq j$, puisque $\gamma(x_i - x_i) = 0$. En valeur probable, on obtient :

$$\frac{1}{N^2}E\left[\sum_{ij}\gamma(x_i-x_j)\right] = \frac{1}{V^2}\sum_{i\neq j}\int_{v_i}\int_{v_j}\gamma(x_i-x_j)\,dx_i\,dx_j$$

$$= \frac{1}{V^2}\sum_{ij}\int_{v_i}\int_{v_j}\gamma(x_i-x_j)\,dx_i\,dx_j - \frac{1}{V^2}\sum_i\int_{v_i}\int_{v_i}\gamma(x_i-x_i')\,dx_i\,dx_i'.$$

L'expression obtenue se simplifie facilement : la somme double en ij des intégrales prises dans v_i et v_j donne, en effet, une intégrale dans V. En désignant par v le volume géométrique des zones d'influence v_i, toutes égales entre elles, l'expression précédente devient

$$\frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x-x')\,dx\,dx' - \frac{1}{Nv^2}\int_v\int_v \gamma(x-x')\,dx\,dx'$$

En reportant ces résultats obtenus pour les valeurs probables des deux premiers termes de (XII,2,1), il vient :

$$\text{(XII,5,2)}\quad \sigma_N^2 = \frac{1}{Nv^2}\int_v\int_v \gamma(x-x')\,dx\,dx' = \frac{1}{N}\,\sigma^2(0|v).$$

La variance d'estimation d'une maille aléatoire stratifiée s'obtient donc, dans le cas où le champ est connu a priori, en divisant par le nombre N *d'échantillons la variance* $\sigma^2(0|v)$ *de chacun d'eux dans sa zone d'influence égale à* v.

Ce résultat doit être comparé avec (XII,5,1). Il apparaît que *la maille aléatoire stratifiée donne toujours une variance d'estimation plus faible que la maille aléatoire pure*, la différence étant :

$$\frac{1}{N}\,[\sigma^2(0|V) - \sigma^2(0|v)] = \frac{1}{N}\,\sigma^2(v|V)$$

c'est-à-dire égale à la variance dans V de la zone d'influence v, divisée par le nombre N des zones d'influence.

Cas où le champ V n'est pas connu a priori. — Il arrive souvent que les limites de la régionalisation ne soient pas connues exactement au moment où l'on implante le réseau aléatoire stratifié. Le quadrillage des zones d'influence φ_i est dessiné a priori, et tout se passe comme s'il était implanté, dans son ensemble, de manière aléatoire relativement à V. On est ainsi ramené à un problème d'estimation transitive. On prendra, comme au paragraphe précédent, le covariogramme transitif $g(h)$, ou plutôt sa valeur probable

$$g(h) = [m^2 + \sigma^2(0|V)]K(h) - K(h)\gamma(h)$$

$K(h)$ étant le covariogramme géométrique du champ V, et on appliquera la formule (IV,4,5) donnant la variance d'estimation transitive de la quantité de métal Q. Pour abréger, on écrira σ^2 au lieu de $\sigma^2(0|V)$ pour désigner la variance de la variable régionalisée dans le champ V. On obtient ainsi :

$$\sigma_Q^2 = \varphi V(m^2 + \sigma^2) - \frac{1}{\varphi}\int_v\int_v (m^2 + \sigma^2)K(x - x')\,dx\,dx' + \frac{1}{\varphi}\int_v\int_v K(x - x')\,\gamma(x - x')\,dx\,dx'$$

De même, pour la variance d'estimation géométrique du volume V lui-même, on obtient, en appliquant la même formule (IV,4,5) :

$$\sigma_V^2 = \varphi V - \frac{1}{\varphi}\int_v\int_v K(x - x')\,dx\,dx'$$

Enfin, exactement comme au paragraphe 4, on doit admettre l'indépendance interne de la variable et de son champ, puisque c'est là, précisément, la condition pour que le formalisme intrinsèque soit applicable. Par suite, on a encore :

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma_Q^2}{Q^2} - \frac{\sigma_V^2}{V^2}.$$

En remplaçant σ_Q^2 et σ_V^2 par leur expression ci-dessus, nous obtenons finalement la variance d'estimation de la teneur m sous la forme suivante :

$$\text{(XII,5,3)} \quad \sigma_m^2 = \frac{\sigma^2\sigma_V^2}{V^2} + \frac{1}{N\varphi^2}\int_v\int_v \frac{K(x - x')}{V}\,\gamma(x - x')\,dx\,dx'$$

Ainsi, la variance d'estimation d'une maille aléatoire stratifiée, dans le cas où le champ V n'est pas connu a priori, est la somme de deux termes. Le premier, égal à $\frac{\sigma^2\sigma_V^2}{V^2}$ représente un effet de bordure. Le deuxième se calcule, comme s'il s'agissait d'une variance à champ connu, en appliquant (XII,5,2) à la fonction intrinsèque $\frac{K(h)}{V}\gamma(h)$.

Comparaison des mailles régulières et aléatoires stratifiées. — On doit comparer soit la maille régulière à implantation préférentielle avec la maille

aléatoire stratifiée à champ connu a priori, soit la maille régulière à implantation flottante avec la maille aléatoire stratifiée à champ quelconque. Les résultats sont identiques à ceux que nous avons obtenus au paragraphe (IV, 4) dans le cas transitif.

Une maille, régulière ou aléatoire stratifiée, sera dite *adaptée* si elle réalise le minimum de la variance d'estimation qui lui correspond, pour un volume donné de la zone d'influence v, c'est-à-dire, pratiquement, pour un mombre donné de prélèvements. Dans le cas isotrope, la maille adaptée est construite sur un polygone régulier, par exemple,dans l'espace à 2 dimensions, un hexagone régulier ou un carré, avec un très léger avantage pour l'hexagone, dans la mesure où l'hexagone se rapproche davantage du cercle que le carré. Pour un $\gamma(h)$ présentant une anisotropie quelconque, il n'est pas évident que les mailles adaptées soient construites sur les mêmes polyèdres dans le cas du réseau régulier ou aléatoire stratifié. Néanmoins, on pourra généralement considérer qu'il en est ainsi, au moins en première approximation, car tout dépend, en réalité, de la nature de l'anisotropie de la fonction intrinsèque au voisinage de l'origine, et celle-ci est souvent assimilable à une simple anisotropie géométrique. Dans le cas où l'anisotropie est géométrique, c'est-à-dire si $\gamma(h)$ peut être ramené à une forme isotrope $\gamma(r)$ par une simple transformation linéaire, il est clair que la maille adaptée est construite sur le polyèdre v qui se ramène, par la même transformation, au polyèdre régulier de la maille adaptée isotrope. Dans ce cas, naturellement, la maille adaptée est la même pour les réseaux réguliers et aléatoires stratifiés.

En règle générale, *la maille régulière adaptée est toujours supérieure à la maille adaptée du réseau aléatoire stratifié.* Il n'y a d'exception que dans le cas d'une fonction intrinsèque aberrante, comportant, par exemple, une composante périodique d'amplitude anormalement élevée pour une période coïncidant avec l'une de celles du réseau de prélèvements. Par contre, de deux mailles non adaptées construites sur un même polyèdre, l'une régulière et l'autre aléatoire stratifiée, on ne peut pas, en général, prévoir celle qui donnera le meilleur résultat sans calculer numériquement les variances d'estimation correspondantes.

6. — Le krigeage.

Nous allons maintenant, formuler le problème de l'estimation d'un point de vue plus général. Etant donné un champ V et une fonction de pondération $p(x)$ nulle en dehors de V et de somme unité (par exemple, $p(x) = \frac{k(x)}{V}$, $k(x)$ étant la variable géométrique associée à V), on se propose d'estimer l'intégrale

$$Z = \int_V p(x) f(x)\, dx \qquad \text{(XII,6,1)}$$

à partir des valeurs numériques, supposées connues, prises par la variable régionalisée sur un ensemble de points V′. Si V′ est un volume continu,

on cherchera une fonction de pondération $\lambda(x)$, ou, si V′ est un ensemble discontinu de N prélèvements ponctuels, des coefficients de pondération λ_i, de somme unité :

$$\text{(XII,6,2)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{V'} \lambda(x)\, dx = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \end{cases}$$

et l'on formera l'estimateur

$$\text{(XII,6,3)} \qquad \begin{cases} Y = \displaystyle\int_{V'} \lambda(x) f(x)\, dx \\ Y = \displaystyle\sum_{i} \lambda_i f(x_i) \end{cases}$$

La fonction $\lambda(x)$ ou les coefficients de pondération λ_i seront choisis de manière à rendre minimale la variance d'estimation $D^2(Y - Z)$, dont la condition (XII,6,2), garantit l'existence. Raisonnons, par exemple, dans le cas continu. On a, d'après (VIII,3,14) :

$$\text{(XII,6,4)} \qquad D^2(Z - Y) = -\int (\lambda - p) * (\check{\lambda} - \check{p})\gamma\, dx$$

Conformément au procédé habituel du calcul des variations, on exprimera que $\lambda(x)$ réalise le minimum de (XII,6,4), compte tenu de la condition de liaison (XII,6,2), en écrivant que la variation :

$$\text{(XII,6,5)} \qquad \delta\left[D^2(Z - Y) + 2\mu \int_{V'} \lambda(x)\, dx\right] = 0$$

est nulle pour toute variation $\delta\lambda(x)$ de la fonction $\lambda(x)$. Le coefficient 2μ, ou multiplicateur de Lagrange, doit ensuite être déterminé par la condition (XII,6,2). Comme $\gamma(x)$ est une fonction paire, la variation (XII,6,5), s'écrit :

$$\begin{aligned} &-\int [\delta\lambda * (\check{\lambda} - \check{p}) + \delta\check{\lambda} * (\lambda - p)]\gamma\, dx + 2\mu \int \delta\lambda(x)\, dx \\ &= -2 \int \delta\lambda * (\check{\lambda} - \check{p})\gamma\, dx + 2\mu \int \delta\lambda(x)\, dx \\ &= -2 \iint \delta\lambda(x)[\lambda(x + h) - p(x + h)]\gamma(h)\, dx\, dh + 2\mu \int \delta\lambda(x)\, dx. \end{aligned}$$

Pour qu'elle soit nulle quelle que soit la variation $\delta\lambda(x)$, il est nécessaire et suffisant que l'on ait, pour *tout point* x *de* V′ :

$$\int [\lambda(x + h) - p(x + h)]\gamma(h)\, dh = \mu$$

ou encore, en notation convolutive [$\gamma(h)$ étant paire]

$$\text{(XII,6,6)} \qquad \lambda * \gamma = \gamma * p + \mu$$

On exprime, en général, ce résultat en disant que tout point x de V′ doit avoir même covariance, à une constante près, avec Y et avec Z. La constante μ se détermine par la condition supplémentaire (XII,6,2). Compte tenu de l'équation (XII,6,6) vérifiée pour tout x de V′, la variance minimale d'estimation ou variance de krigeage σ_K^2 est donnée par :

$$\sigma_K^2 = -\int (\lambda - p)[(\lambda - p) * \gamma]\, dx = -\mu + \int p[(\lambda - p) * \gamma]\, dx$$

soit

$$\text{(XII,6,7)} \qquad \sigma_K^2 = \int \gamma(\lambda * \check{p})\, dx - \mu - \int \gamma(p * \check{p})\, dx$$

Théorème de superposition des figures de krigeage. — A partir des mêmes données, c'est-à-dire des valeurs numériques prises par la variable $f(x)$ dans le domaine V′, on peut naturellement krieger les teneurs moyennes Z_i de différents domaines V_i pondérées par différentes fonctions $p_i(x)$ de somme unité :

$$Z_i = \int_{V_i} p_i(x) f(x)\, dx$$

Soient $\lambda_i(x)$ les solutions correspondantes de l'équation (XII,6,6). Pour krieger la variable Z, moyenne des Z_i pondérés par des coefficients α_i de somme unité

$$Z = \Sigma \alpha_i Z_i = \int \sum_i \alpha_i p_i(x) f(x)\, dx$$

il suffit de prendre pour $\lambda(x)$ la moyenne pondérée des $\lambda_i(x)$ par les mêmes α_i

$$\lambda(x) = \Sigma \alpha_i \lambda_i(x).$$

En effet, les $\lambda_i(x)$, par hypothèse, vérifient les relations :

$$\begin{cases} \lambda_i * \gamma = p_i * \gamma + \mu_i \\ \int \lambda_i(x)\, dx = 1 \end{cases}$$

pour tout point x du domaine V′. Il suffit de multiplier par α_i et de sommer en i pour obtenir :

$$\begin{cases} \lambda * \gamma = \gamma * \Sigma \alpha_i p_i + \Sigma \alpha_i \mu_i \\ \int \lambda(x)\, dx = 1 \end{cases}$$

relations également vérifiées pour tout point x de V′.

Ainsi, *sous réserve d'utiliser toujours le même domaine* V′ *pour former l'estimateur* Y, *les figures de krigeage se superposent linéairement.*

En particulier, toute figure de krigeage peut s'obtenir par superposition de *krigeages ponctuels.* Prenons pour variable Z à estimer la valeur $f(y)$

prise par $f(x)$ au point y. L'équation (XII,6,6) se réduit, dans ce cas, à :

$$\text{(XII,6,8)} \qquad \int_{V'} \lambda(x)\, \gamma(x' - x)\, dx = \gamma(x' - y) + \mu$$

et doit être vérifiée pour tout point x', appartenant à V'. Si l'on connaît la solution $\lambda(x; y)$ de cette équation, qui dépend évidemment du point krigé y, on en déduit immédiatement la solution générale de (XII,6,6), qui est :

$$\text{(XII,6,9)} \qquad \lambda(x) = \int_{V} p(y)\, \lambda(x; y)\, dy.$$

Cette méthode de superposition des krigeages ponctuels est très utile dans les applications.

Dans le cas où le volume V' est quelconque, il est difficile de résoudre une équation intégrale telle que (XII,6,8). Dans les applications, cependant, et notamment dans l'industrie minière, le domaine V' où les valeurs numériques de $f(x)$ sont connues est constitué soit d'un nombre N fini de points de prélèvements discontinus, soit d'un réseau continu assimilable à des courbes (travaux miniers par exemple). Examinons ces deux cas.

Krigeage continu le long de courbes. — Si V' est constitué d'une, ou plusieurs, courbes C, on peut prendre comme paramètre descriptif l'abscisse curviligne s d'un point x de C. Les équations du krigeage ponctuel, pour un point y, s'écrivent alors :

$$\text{(XII,6,10)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_C \lambda(s)\, \gamma[x(s') - x(s)]\, ds = \gamma[x(s') - y] + \mu \\ \displaystyle\int_C \lambda(s)\, ds = 1. \end{cases}$$

Pour une courbe C et une fonction γ quelconques, on ne sait pas, en général, résoudre ce système d'équations intégrales. Nous étudierons, au chapitre XIV, le cas particulier très intéressant où $\gamma(h)$ est de la forme $\log r$ (schéma de wijsien isotrope) dans l'espace à 2 dimensions : si la courbe C est une courbe fermée, la théorie des potentiels harmoniques permet de résoudre explicitement le système (XII,6,10). On démontre, dans ce cas, un théorème de l'effet d'écran, analogue au théorème bien connu de l'écran électrique, qui établit l'absence de corrélation entre l'intérieur et l'extérieur de la courbe C, une fois connues les valeurs prises par $f(x)$ sur C, c'est-à-dire le caractère markovien de ce schéma intrinsèque de l'espace à 2 dimensions.

Krigeage discontinu. — Lorsque le domaine V' se réduit à un ensemble de N points de prélèvements discontinus, l'équation intégrale (XII,6,8)

du krigeage ponctuel est remplacée par un système d'équations linéaires beaucoup plus facile à résoudre :

$$(\text{XII},6,11) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \gamma(x_j - x_i) = \gamma(x_j - y) + \mu \\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1. \end{cases}$$

Intérêt pratique du krigeage. — Dans beaucoup de cas, l'amélioration apportée par la méthode du krigeage, par rapport à une simple moyenne arithmétique, se traduit par une diminution relativement modeste de la variance d'estimation, qui ne justifierait pas à elle seule le recours aux calculs souvent longs et pénibles que nécessite la résolution d'un système comme (XII,6,11), et, à plus forte raison, la résolution d'une équation intégrale telle que (XII,6,10). L'intérêt majeur du krigeage, dans bien des applications, ne résidera donc pas dans cette diminution presque négligeable de la variance d'estimation, mais dans le fait qu'il permettra d'éviter une erreur systématique dans l'estimation d'une zone sélectionnée au vu des résultats de l'échantillonnage lui-même. Dans l'industrie minière, par exemple, on est souvent amené à sélectionner, au sein d'une minéralisation homogène, une zone, ou panneau, plus riche que le reste de la formation et considérée comme seule exploitable. Naturellement, cette sélection des panneaux exploitables est fondée sur les résultats d'échantillonnage. Mais, si on se limitait, pour estimer la teneur moyenne d'un panneau sélectionné, aux seuls échantillons prélevés à l'intérieur de celui-ci, il en résulterait, inévitablement, *une erreur systématique par excès*, c'est-à-dire particulièrement redoutable. Du fait même que l'on sélectionne un panneau riche, l'auréole des échantillons extérieurs est, en général, à teneur plus faible que les échantillons intérieurs, et cependant son influence sur le panneau à estimer n'est pas négligeable, puisque le kriegage lui attribue un poids non nul. N'en pas tenir compte introduit donc bien une cause de surestimation systématique, que le krigeage permet d'éliminer.

Théoriquement, n'importe quel panneau devrait être krigé par la totalité des échantillons disponibles. Pratiquement, on s'aperçoit, en général, qu'il suffit de prendre en compte une ou deux auréoles d'échantillons extérieurs, qui arrêtent, en quelque sorte, la quasi totalité de l'influence des échantillons les plus lointains. Cet *effet d'écran* joue un rôle très important dans l'application pratique du krigeage, ainsi que la considération des symétries géométriques, qui permet de regrouper en un petit nombre d'« auréoles » des groupes d'échantillons occupant des positions équivalentes vis-à-vis du panneau à estimer. On arrive ainsi à réduire à deux ou trois le nombre des coefficients λ_i et des équations du système linéaire (XII,6,11).

CHAPITRE XIII

ESTIMATION ET FLUCTUATIONS DES MOMENTS INTRINSÈQUES

SOMMAIRE

Ce chapitre, assez spécialisé et de lecture relativement difficile, est consacré aux problèmes de fluctuation et d'estimation de la dérive linéaire, du demi-variogramme, et de la variance. Pour chaque paramètre, on distingue une valeur expérimentale, *calculée à partir des résultats d'un réseau fini de prélèvements,* une valeur locale, *calculée à partir de toutes les valeurs prises par* $f(x)$ *dans un champ* V, *et enfin une* valeur théorique, *ou valeur probable a priori des précédentes. On appelle fluctuation la différence entre la valeur locale et la valeur théorique. Pour une dérive linéaire ou une variance locale, l'ampleur de ces fluctuations est énorme. En ce qui concerne le demi-variogramme local, seuls ses premiers points sont bien représentatifs de la fonction intrinsèque théorique. Aux distances croissantes, l'ampleur des fluctuations devient vite démesurée. Dans les applications,* les tests, *permettant de comparer une régionalisation à un modèle théorique, devront donc surtout porter sur les premiers points du demi-variogramme. Au contraire,* l'estimation *d'une valeur locale par une valeur expérimentale peut, en général, être faite dans des conditions acceptables.*

Le paragraphe 1 *définit la terminologie rappelée ci-dessus, et pose les formules générales des moments d'ordre 4, notamment la covariance quadratique, et les explicite dans le cas gaussien (seul cas, pratiquement, où les calculs peuvent être conduits jusqu'au bout).*

Le paragraphe 2 *est consacré à la dérive linéaire. Les fluctuations sont très importantes. La formule générale de la variance de fluctuation est explicitée, sous forme simple, dans le cas d'une seule dimension. L'estimation de la dérive locale est ensuite examinée.*

Le paragraphe 3 *traite du demi-variogramme : fluctuations énormes, sauf pour* $|h|$ *petit, bien mises en évidence dans le cas* $\gamma(h) = h^\lambda$ *et pour une dimension. L'estimation, par contre, conduit à des variances plus modérées.*

Le paragraphe 4 *est consacré à la variance locale (dans un champ* V*). Ici encore, fluctuations énormes, explicitées à une dimension pour* $\gamma(h) = h^\lambda$. *Le problème de l'estimation comprend deux parties : détermination du biais, différence systématique entre variances locales et expérimentales, dont la nature est celle d'une variance d'estimation, et calcul de la* dispersion, *ou variance d'estimation qui conduit à une formule générale, difficile à expliciter, mais de structure analogue à celle des variances d'estimation usuelle.*

1. — Terminologie, et moments d'ordre 4.

L'étude des fluctuations des moments intrinsèques d'ordre 1 (dérive linéaire) et d'ordre 2 (demi-variogramme ou variance) présente une grande importance pratique, en tant qu'elle permet de formuler des tests capables de contrôler la valeur de l'hypothèse intrinsèque. Pour tout moment intrinsèque, nous distinguerons *une valeur expérimentale*, calculée en général à partir des valeurs numériques $f(x_i)$ prises par la variable régionalisée en un nombre fini de points de prélèvements x_i, une *valeur locale*, définie, pour un domaine, ou champ géométrique V, par une intégrale stochastique étendue à V, et enfin une *valeur théorique*, qui n'est autre que la valeur probable des deux variables aléatoires précédentes. Du point de vue stochastique, valeurs expérimentales et locales sont des variables aléatoires de même nature, et ne se distinguent que par le caractère fini ou non de leur domaine de définition. Mais, du point de vue physique, seules les valeurs locales sonstituent une réalité objective, indépendante de toute interprétation, et sont parfois aussi, pour cette raison, appelées *valeurs locales vraies*. Ce n'est qu'après avoir admis l'hypothèse stochastique intrinsèque que la valeur locale vraie perd son caractère premier et se subordonne à sa valeur probable à priori, ou valeur théorique. L'écart entre valeurs locale et théorique constitue *une fluctuation*, et c'est l'examen de l'amplitude de ces fluctuations qui doit permettre de juger si une régionalisation expérimentale donnée peut, ou non, être représentée de façon satisfaisante par un modèle stochastique déterminé. Il faut bien voir que la fluctuation n'est en aucune manière liée au caractère fragmentaire de l'échantillonnage. Elle existe, et a une variance différente de zéro, même si l'on connaît expérimentalement les valeurs prises par $f(x)$ en tous les points x du champ V en nombre infini. Au contraire, l'écart entre une valeur expérimentale, calculée sur un nombre fini de points de prélèvements, et la valeur locale vraie correspondante doit être considérée comme une erreur *d'estimation*, et son amplitude est liée au nombre des points de prélèvements, ou, plus exactement, à la géométrie relative du réseau de prélèvements et du champ V dans lequel est estimée la valeur locale vraie. Ainsi, pour tout moment intrinsèque, se posent deux problèmes bien distincts : celui de la fluctuation de la valeur locale vraie (relativement à sa valeur probable dans un schéma théorique) et celui de l'estimation de la valeur locale vraie (à partir de la valeur expérimentale déduite d'un réseau fini de prélèvements).

***Moments d'ordre* 4.** — La fluctuation, ou l'estimation d'un moment intrinsèque d'ordre k sera caractérisé par une variance, dont le calcul fera nécessairement intervenir les moments d'ordre $2k$. Pour $k = 1$, c'est-à-dire pour la dérive linéaire (par. VIII,1), cette variance s'exprime à l'aide de la fonction intrinsèque $\gamma(h)$ elle-même. Par contre, pour $k = 2$, c'est-à-dire pour l'estimation ou la fluctuation d'une variance ou d'un demi-

variogramme local, il faut faire appel aux moments d'ordre 4. En particulier, on doit supposer que ces moments existent et possèdent le caractère stationnaire, hypothèse un peu plus forte que dans les chapitre précédents, où le caractère stationnaire d'ordre 2 seulement suffisait le plus souvent.

Nous ferons d'ailleurs fréquemment une hypothèse beaucoup plus forte en supposant que les accroissements de la variable régionalisée sont des variables aléatoires gaussiennes : cette hypothèse n'est nullement obligatoire, mais elle nous permettra d'effectuer les calculs jusqu'au bout et de dégager des ordres de grandeur. On sait que, si X_1, X_2, X_3, X_4 sont des variables simultanément normales, de valeurs probables égales à 0, et admettant les moments d'ordre 2 :

$$\sigma_{ij} = E(X_i X_j)$$

le moment général d'ordre 4 a pour expression :

$$(XIII,1,1) \qquad E(X_1X_2X_3X_4) = \sigma_{12}\sigma_{34} + \sigma_{13}\sigma_{24} + \sigma_{14}\sigma_{23}.$$

Prenons comme variables X des accroissements quelconques d'une fonction aléatoire intrinsèque $f(x)$:

$$\begin{cases} X_1 = f(x_{i_2}) - f(x_{i_1}) = \varepsilon_i \\ X_2 = f(x_{j_2}) - f(x_{j_1}) = \varepsilon_j \\ X_3 = f(x_{k_2}) - f(x_{k_1}) = \varepsilon_k \\ X_4 = f(x_{l_2}) - f(x_{l_1}) = \varepsilon_l. \end{cases}$$

Si les accroissements sont gaussiens et de valeur probable nulle, on déduit de (XIII,1,1) :

$$(XIII,1,2) \qquad E(\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_l) = E(\varepsilon_i\varepsilon_j)\,E(\varepsilon_k\varepsilon_l) + E(\varepsilon_i\varepsilon_k)\,E(\varepsilon_j\varepsilon_l) + E(\varepsilon_i\varepsilon_l)\,E(\varepsilon_j\varepsilon_k).$$

D'après la formule générale (VIII,1,9), on a :

$$E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = E(i_1 i_2,\ j_1 j_2) = \gamma(x_{i_1} - x_{j_2}) + \gamma(x_{i_2} - x_{j_1}) - \gamma(x_{i_1} - x_{j_1}) - \gamma(x_{i_2} - x_{j_2}).$$

Pour abréger les notations, introduisons des indices grecs α, β, λ, μ, susceptibles de prendre la valeur 1 ou 2, et posons :

$$\gamma(i_\alpha j_\beta) = \gamma(x_{i_\alpha} - x_{j_\beta}).$$

La covariance $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)$ se met sous la forme d'une somme de quatre termes :

$$E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = \sum_{\alpha\beta} (-1)^{\alpha+\beta-1}\,\gamma(i_\alpha j_\beta).$$

et l'on a, naturellement, des relations analogues pour $E(\varepsilon_i\varepsilon_k)$, $E(\varepsilon_i\varepsilon_l)$ etc... Avec ce système de notations, (XIII,1,2) se met sous la forme d'une somme de 16 termes :

$$(XIII,1,3) \qquad E(\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_l) = \sum_{\alpha\beta\lambda\mu} (-1)^{\alpha+\beta+\lambda+\mu} [\gamma(i_\alpha j_\beta)\,\gamma(k_\lambda l_\mu) + \gamma(i_\alpha k_\lambda)\,\gamma(j_\beta l_\mu) + \gamma(i_\alpha l_\mu)\,\gamma(j_\beta k_\lambda)].$$

La fonction qui figure entre crochets dans (VIII,1,3) :

$$\text{(XIII,1,4)}\quad \Gamma(x_{i_\alpha}, x_{j_\beta}, x_{k_\lambda}, x_{l_\mu}) = \gamma(i_\alpha j_\beta)\gamma(k_\lambda l_\mu) + \gamma(i_\alpha k_\lambda)\gamma(j_\beta l_\mu) + \gamma(i_\alpha l_\mu)\gamma(j_\beta k_\lambda)$$

est symétrique vis-à-vis des quatre points x_{i_α}, x_{j_β}, x_{k_λ} et x_{l_μ}, et invariante pour toute translation d'ensemble effectuée sur ces 4 points (c'est-à-dire invariante lorsque l'on remplace x_{i_α}, x_{j_β} ... par $x_{i_\alpha} + h$, $x_{j_\beta} + h$ ...).

Si, maintenant, les accroissements ne sont pas gaussiens, on peut montrer (1) qu'il existe encore une fonction $\Gamma(x_{i_\alpha}, x_{j_\beta}, x_{k_\lambda}, x_{l_\mu})$, symétrique et invariante pour toute translation, et telle que l'on ait :

$$\text{(XIII,1,5)}\quad \mathrm{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_l) = \sum_{\alpha\beta\lambda\mu} (-1)^{\alpha+\beta+\lambda+\mu}\, \Gamma(x_{i_\alpha}, x_{j_\beta}, x_{k_\lambda}, x_{l_\mu})$$

Seule donc la forme particulière (XIII,1,4) de la fonction Γ est liée au caractère gaussien des accroissements, et la relation (XIII,1,5) est vérifiée pour des lois de répartition quelconques, sous réserve seulement que les moments d'ordre 4 soient définis.

La covariance quadratique. — Comme cas particulier de la formule générale (XIII,1,5), nous pouvons calculer la covariance de $[f(x+h)-f(x)]^2$ et $[f(y+h)-f(y)]^2$, où x et y sont deux points et h un vecteur quelconque. On obtient une fonction paire $\mathrm{G}(x-y;\, h)$ des deux arguments $x-y$ et h, appelée covariance quadratique :

$$\text{(XIII,1,6)}\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{G}(x-y;h) &= \mathrm{E}\{[f(x+h)-f(x)]^2[f(y+h)-f(y)]^2\} - 4\overline{\gamma(h)}^2 \\ &= \sum_{\alpha\beta\lambda\mu} (-1)^{\alpha+\beta+\lambda+\mu}\, \Gamma(x+\alpha h, x+\beta h, y+\lambda h, y+\mu h) - 4\overline{\gamma(h)}^2 \end{aligned}\right.$$

La somme est étendue aux 16 termes obtenus en donnant à α, β, λ et μ les valeurs 0 ou 1.

Dans le cas gaussien, la covariance quadratique se relie directement à la fonction intrinsèque $\gamma(h)$. Cela résulte de (XIII,1,4), mais il est plus simple d'utiliser directement (XIII,1,2), qui donne ici :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{[f(x+h)-f(x)]^2[f(y+h)-f(y)]^2\} &= \overline{\mathrm{E}(\varepsilon_i^2)}^2 + 2\,\overline{\mathrm{E}(\varepsilon_i\varepsilon_k)}^2 \\ &= 4\overline{\gamma(h)}^2 + 2[\gamma(x-y+h) + \gamma(x-y-h) - 2\gamma(x-y)]^2. \end{aligned}$$

On en tire l'expression remarquable de la covariance quadratique du cas gaussien :

$$\text{(XIII,1,7)}\quad \mathrm{G}(x-y;h) = 2[\gamma(x-y+h) + \gamma(x-y-h) - 2\gamma(x-y)]^2.$$

(1) La démonstration directe de (XIII, 1,5) serait un peu pénible. Il vaut mieux considérer $f(x)$ comme une distribution aléatoire intrinsèque, et appliquer les résultats de (X-6). Le moment d'ordre 4 est une distribution $\mathrm{M}_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ de l'espace à $4n$ dimensions, symétrique et invariante par translation, et agissant sur les fonctions de base de somme nulle. En fait, M_4 est ici une fonction, et agit sur les mesures de Dirac. En prenant comme fonctions de bases $\varphi_1(x_1) = \delta(x_1 - x_{i_1}) - \delta(x_1 - x_{i_1})$, $\varphi_2(x_2) = \delta(x_2 - x_{j_2}) - \delta(x_2 - x_{j_1})$ etc..., on obtient directement (XIII, 1,5).

Nous examinerons successivement les problèmes d'estimation et de fluctuation posés par les moments d'ordre 1 et 2, sans aborder le problème plus général de statistique mathématique de l'estimation simultanée des moments des deux premiers ordres. Examinant la dérive linéaire, nous supposerons la fonction intrinsèque $\gamma(h)$ connue a priori, et, inversement, nous étudierons les moments d'ordre 2 en supposant que la dérive est identiquement nulle. Les formules obtenues resteront valables en première approximation (au premier ordre) dans le cas où $\gamma(h)$ et la dérive doivent être estimées simultanément, et cette approximation sera le plus souvent suffisante dans les applications.

2. — Estimation et fluctuation de la dérive linéaire.

Nous avons vu, au paragraphe (VIII,1) que les moments d'ordre 1 des accroissements d'un schéma intrinsèque $f(x)$ mettaient en évidence une dérive linéaire de gradient constant $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_n)$, conformément à la formule :

$$\text{(XIII,2,1)} \quad E[f(x+h) - f(x)] = h\Delta = h_1\Delta_1 + h_2\Delta_2 + \cdots + h_n\Delta_n.$$

Par ailleurs, à partir des valeurs, supposées connues, prises par une variable régionalisée $f(x)$ dans son champ géométrique V, on définit *la valeur locale* vraie $\Delta_V(h)$, de la dérive pour chaque argument vectoriel h, par l'intégrale :

$$\text{(XIII,2,2)} \qquad \Delta_V(h) = \frac{1}{K(h)} \int_{V'} [f(x+h) - f(x)]\, dx.$$

Conformément à nos notations habituelles, $K(h)$ est le covariogramme transitif associé au champ V, et représente la mesure du volume $V' = V \cap \tau_{-h}V$ de l'intersection du champ V et de son translaté dans la translation $-h$: c'est seulement pour les points x appartenant à cette intersection que l'on dispose à la fois des valeurs numériques de $f(x+h)$ et $f(x)$.

Enfin, si l'on ne dispose que d'un nombre fini de points de prélèvements x_i, implantés selon une maille régulière, on estimera la dérive à l'aide de la valeur expérimentale :

$$\text{(XIII,2,3)} \qquad \Delta_e(h) = \frac{1}{N'} \sum_i [f(x_i + h) - f(x_i)].$$

L'expression (XIII,2,3) ne sera, en fait, accessible que pour des valeurs discontinues de l'argument vectoriel h, puisque celui-ci doit avoir comme composantes des multiples entiers des vecteurs de base de la maille. Le nombre N' représente le nombre de couples de points $(x_i + h, x_i)$ disponibles pour un même vecteur h : c'est évidemment une fonction de h.

Les dérives locales ou expérimentales définies en (XIII,2,2) et (XIII,2,3) ne correspondent pas, en général, à un gradient constant Δ_V ou Δ_e. A

la différence de la dérive théorique $h\Delta$ ce ne sont pas des formes linéaires, mais des fonctions quelconques $\Delta_V(h)$ ou $\Delta_e(h)$, qui, du point de vue stochastique, doivent être considérées comme des fonctions aléatoires de h, d'ailleurs non stationnaires. Nous n'aborderons pas le problème général des fluctuations ou de l'estimation simultanées de ces fonctions pour plusieurs valeurs de l'argument h, et nous nous limiterons au cas où l'on ne considère à la fois qu'une seule valeur de h, pour laquelle $\Delta_V(h)$ ou $\Delta_e(h)$ est alors une variable aléatoire odrinaire.

Fluctuation de la dérive linéaire locale. — Pour un argument h arbitraire, mais fixe, la variable aléatoire (XIII,2,2) a une valeur probable égale à la valeur théorique $h\Delta$:

$$E[\Delta_V(h)] = h\Delta$$

et une variance $D^2[\Delta_V(h)]$ qui n'est autre que la variance d'extension des teneurs moyennes des deux intersections de V avec ses translatés par $+h$ et $-h$. La formule générale (VIII,3,13) donne immédiatement :

$$\text{(XIII,2,4)} \quad D^2[\Delta_V(h)] = \frac{2}{\overline{K(h)}^2}\int_{V'}\int_{V'} \gamma(x - x' + h)\,dx\,dx' - \frac{2}{\overline{K(h)}^2}\int_{V'}\int_{V'} \gamma(x - x')\,dx\,dx'.$$

L'amplitude de la fluctuation de la dérive locale, autour de sa valeur théorique, est ainsi caractérisée par sa variance (XIII,2,4), qui est naturellement une fonction de h. En remplaçant les intégrales par des sommes discontinues, on définirait de même la variance de la fluctuation de $\Delta_e(h)$ autour de la même valeur théorique, à peine différente de la précédente pourvu que le nombre N′ des prélèvements ne soit pas très petit : Dans un problème de fluctuation, ce nombre N′ ne joue qu'un rôle subordonné. Pour N′ infini, (XIII,2,2) et (XIII,2,3) coïncident, et la variance $D^2[\Delta_V(h)]$ ne s'annule en aucune manière.

Exemple. — Pour avoir une idée de l'ordre de grandeur de la variance de fluctuation, plaçons nous dans un espace à *une seule dimension*, et supposons que le champ V soit un segment de longueur L. En utilisant la fonction intrinsèque auxiliaire $F(h)$ déjà introduite en (XII,3,1), on met sans trop de peine la formule (XIII,2,4) sous la forme suivante :

$$\text{(XIII,2,5)} \quad D^2[\Delta_V(h)] = \frac{1}{(L-h)^2}\left[\frac{1}{2}L^2F(L) + \frac{1}{2}(L-2h)^2F(L-2h) - (L-h)^2F(L-h) - h^2F(h)\right].$$

Si h est suffisamment petit $\left(\text{et, en particulier, inférieur à } \frac{L}{2}\right)$, on aura les approximations suivantes :

$$\text{(XIII,2,6)} \quad D^2[\Delta_V(h)] \neq \frac{h^2}{(L-h)^2}[\gamma(L-h) - F(h)] \neq \frac{h^2}{L^2}[\gamma(L) - F(h)].$$

La partie principale de cette variance est proportionnelle à h^2. Par suite, en première approximation, la variance de fluctuation du gradient $\frac{1}{h}\Delta_V(h)$ de la dérive :

$$\frac{1}{h^2}\,D^2[\Delta_V(h)] \neq \frac{1}{L^2}\,\gamma(L)$$

est constante et égale à $\frac{1}{L^2}\,\gamma(L)$. *L'amplitude de ces fluctuations peut être considérable.* En effet, l'accroissement relatif :

$$\frac{f(x+L)-f(x)}{L}$$

de $f(x)$ entre deux points distints de L a, par définition, une variance égale à $\frac{2}{L^2}\,\gamma(L)$, c'est-à-dire au double seulement de la partie principale de la variance de fluctuation. Entre les deux cas extrêmes où l'on dispose soit de deux valeurs numériques $f(x+L)$ et $f(x)$ seulement, soit de l'infinité de valeurs numériques prises par la variables $f(x)$ sur la totalité du segment L, la variance de fluctuation du gradient n'est réduite que de deux à un. Dans les applications, on devra se garder de conclure précipitamment à l'existence d'une dérive réelle. Bien souvent, les dérives observées, pour importantes qu'elles soient, ne sont nullement significatives, compte tenu des valeurs élevées des variances de fluctuation.

Estimation de la dérive locale. — Le plus souvent, on ne connaîtra pas la dérive locale vraie (XIII,2,2), mais seulement son estimation (XIII,2,3) ou dérive expérimentale, obtenue à partir d'un réseau fini de prélèvements ponctuels. Les valeurs locales et expérimentales peuvent différer assez notablement l'une de l'autre, mais de manière tout de même moins catastrophique que l'une ou l'autre d'entre elle ne diffère de sa valeur probable théorique. Le calcul de la variance d'estimation de la dérive locale est un simple cas particulier du problème général de l'estimation traité au chapitre XII. Prenons, en effet, la fonction aléatoire :

$$f(x+h)-f(x)$$

Elle admet, h restant fixe, le demi variogramme :

$$\text{(XIII,2,7)}\quad \gamma_\Delta(x-y) = \frac{1}{2}\,D^2[f(x+h)-f(x)-f(y+h)+f(y)]$$
$$= 2\gamma(h) + 2\gamma(x-y) - \gamma(x-y-h) - \gamma(x-y+h).$$

La variance d'estimation de la dérive locale $D^2[\Delta_V(h) - \Delta_\varepsilon(h)]$ s'obtient en appliquant à $\gamma_\Delta(x-y)$, et pour le réseau de N′ points de prélèvements effectivement utilisés dans le calcul de $\Delta_\varepsilon(h)$, les formules générales du chapitre XII. En fait, on peut obtenir rapidement un ordre de grandeur approché. Le vecteur h est, en effet, obligatoirement un

multiple entier de la maille, et, tant que $(x - y)$ reste intérieur au parallélépipède de base de la maille, les seuls termes irréguliers de γ_Δ sont ceux de sa composante $2\gamma(x - y)$, égale au double de la fonction intrinsèque $\gamma(h)$, et il suffit, par conséquent, d'appliquer les formules générales à $2\gamma(h)$. Si σ_N^2 est la variance d'estimation sur la teneur moyenne de V, pour le réseau complet des N prélèvements disponibles, on aura très souvent, en première approximation :

$$\text{(XIII,2,8)} \qquad D^2[\Delta_V(h) - \Delta_e(h)] \neq 2\frac{N}{N'}\sigma_N^2$$

Ainsi, la variance d'estimation de la dérive locale est de l'ordre de grandeur du double de la variance d'estimation de la teneur moyenne. Elle est, en particulier, toujours notablement plus faible que la variance de fluctuation (XIII,2,4) ou (XIII,2,6). Autrement dit, *on pourra souvent procéder, dans des conditions acceptables, à l'estimation d'une dérive locale, mais on pourra beaucoup plus rarement affirmer que la dérive locale ainsi mise en évidence est significativement différente de zéro* : mutatis mutandis, la même circonstance s'observe, comme nous allons le voir, dans le cas des moments d'ordre deux.

3. — Estimation et fluctuation du demi-variogramme local.

Avec les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, nous appellerons demi-variogramme local l'intégrale :

$$\text{(XIII,3,1)} \qquad \gamma_V(h) = \frac{1}{2K(h)}\int_{V'}[f(x+h) - f(x)]^2\,dx.$$

Si l'on connaissait toutes les valeurs numériques prises par la variable régionalisée dans son champ V, ce demi-variogramme local $\gamma_V(h)$ pourrait être construit point par point. Bien qu'il possède, en réalité, une pleine signification objective, $\gamma_V(h)$ est interprété, dans l'optique stochastique, comme une variable aléatoire, dont la valeur probable n'est autre que le $\gamma(h)$ théorique.

De même, si l'on ne dispose que d'un réseau fini de prélèvements ponctuels à maille régulière, on construira, expérimentalement, pour des vecteurs h multiples entiers des vecteurs de base de la maille, le demi-variogramme expérimental

$$\text{(XIII,3,2)} \qquad \gamma_e(h) = \frac{1}{2N'}\sum_i [f(x_i + h) - f(x_i)]^2$$

où N′ représente le nombre de couples $(x_i + h,\ x_i)$ effectivement disponibles. Du point de vue stochastique, $\gamma_e(h)$ est également interprété comme une variable aléatoire de valeur probable égale à la valeur théorique $\gamma(h)$.

Fluctuations du demi-variogramme local. — Nous caractérisons les fluctuations de $\gamma_V(h)$ autour de $\gamma(h)$ par la variance de fluctuation :

$$D^2[\gamma_V(h) - \gamma(h)] = E[\gamma_V(h)^2] - \overline{\gamma(h)^2}$$

qui s'exprime facilement à l'aide de la covariance quadratique $G(x-y;\, h)$ introduite en (XIII,1,6). Le vecteur h étant fixe, en effet, la fonction aléatoire

$$\frac{1}{2}[f(x+h) - f(x)]^2 - \gamma(h)^2$$

admet comme covariance la fonction $\frac{1}{4}G(x-y;\, h)$. Par suite, d'après la formule générale (VII,3,10), l'intégrale stochastique (XIII,3,1) admet la variance a priori :

$$\text{(XIII,3,3)} \quad D^2[\gamma_V(h)] = \frac{1}{4\overline{K(h)}^2}\int_{V'}\int_{V'} G(x-y;\, h)\, dx\, dy$$

qui est la variance de fluctuation du demi-variogramme local. Dans le cas gaussien, compte tenu de l'expression (XIII, 1, 7) de la covariance quadratique, la variance de fluctuation prend la forme :

(XIII,3,4)

$$D^2[\gamma_V(h)] = \frac{1}{2K(h)^2}\int_{V'}\int_{V'} [\gamma(x-y+h) + \gamma(x-y-h) - 2\gamma(x-y)]^2\, dxdy.$$

Exemple :

Fluctuations du demi-variogramme h^λ à une dimension. — La formule générale de la variance de fluctuation conduit à des calculs assez difficiles, même dans le cas gaussien et sous la forme (XIII, 3, 4). Afin de dégager des ordres de grandeur, nous appliquerons la formule (XIII, 3, 4) du cas gaussien au demi-variogramme $\gamma(h) = h^\lambda$ dans un espace à une dimension, et en supposant que le champ géométrique soit un segment de longueur L. Pour abréger les notations, nous poserons :

$$l = L - h.$$

La formule (XIII,3,4) se particularise ici de la manière suivante :

$$\text{(XIII,3,5)} \quad D^2[\gamma_V(h)] = \frac{1}{l^2}\int_0^l (l-x)\,[(x+h)^\lambda + |x-h|^\lambda - 2x^\lambda]^2\, dx.$$

Le calcul explicite de l'intégrale du deuxième membre introduit diverses fonctions hypergéométriques. Donnons seulement les premiers termes du développement de (XIII,3,5). Pour $h \leqslant l$, c'est-à-dire $h \leqslant \frac{L}{2}$, on obtient deux termes irréguliers, l'un en $\frac{h^{1+2\lambda}}{l}$ et l'autre en $\frac{h^{2+2\lambda}}{l^2}$, et une partie régulière qui est le produit par $l^{2\lambda}$ d'une série entière paire en $\frac{h}{l}$. La partie régulière s'obtient facilement, en identifiant la dérivée

seconde de $l^2 D^2[\gamma_V(h)]$ avec le développement de $[(l+h)^\lambda + (l-h)^\lambda - 2l^\lambda]^2$ écrit pour $h < l$. Les termes irréguliers doivent être mis en évidence par un calcul direct, que nous ne reproduisons pas. On trouve :

$$\text{(XIII,3,6)} \quad D^2[\gamma_V(h)] = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\lambda\right)}\left[1 - \frac{1}{\cos \lambda\pi}\right](1 - 2^{1-2\lambda})\frac{h^{1+2\lambda}}{l}$$
$$+\left[2^{-2\lambda}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\lambda\right)} - \frac{2}{1+2\lambda}\right]\frac{h^{2+2\lambda}}{l^2} + \frac{\lambda^2(1-\lambda)}{2(3-2\lambda)}\frac{h^4}{l^4}\,l^{2\lambda}$$
$$+\frac{\lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda-3)}{12(2\lambda-5)}\frac{h^6}{l^6}\,l^{2\lambda} + \cdots.$$

Lorsque $h \geqslant l$, c'est-à-dire $h \geqslant \frac{L}{2}$, le développement en $\frac{l}{h}$ s'obtient directement, en développant sous le signe somme en $\frac{x}{h}$ et en intégrant en x. On obtient facilement l'expression suivante :

$$\text{(XIII,3,7)} \quad \left\{ \begin{aligned} D^2[\gamma_V(h)] &= 2h^{2\lambda}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_{2\lambda}^{2k} + (-1)^k C_\lambda^k}{(2k+1)(2k+2)}\frac{l^{2k}}{h^{2k}}\right] \\ &+ \frac{4l^{2\lambda}}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)} - 8h^\lambda l^\lambda\left[\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_\lambda^{2k}}{(\lambda+2k+1)(\lambda+2k+2)}\frac{l^{2k}}{h^{2k}}\right]. \end{aligned} \right.$$

Pour h très petit, la partie principale de la variance de fluctuation est en $\frac{h^{1+2\lambda}}{l}$ $\left(\text{ou en } \frac{h^4}{l^2}l^{2\lambda} \text{ si } \lambda \text{ est supérieur à } \frac{3}{2}\right)$. La variance relative $\frac{1}{h^{2\lambda}} D^2[\gamma_V(h)]$ est alors proportionnelle à $\frac{h}{l}$, et, en particulier, elle s'annule avec h : ainsi, les premiers points du demi-variogramme local ont une variance de fluctuation peu élevée, et peuvent donner une image correcte de la fonction intrinsèque théorique $\gamma(h)$. Mais, pour h croissant, ce tableau rassurant se détériore très vite, et la variance de fluctuation atteint rapidement des valeurs importantes. *En dehors du voisinage immédiat de l'origine, il n'y a plus qu'un rapport lointain entre le demi-variogramme local et la fonction intrinsèque* $\gamma(h)$. Pour la valeur extrême $h = L$ (soit $l = L - h = 0$), le développement (XIII,3,7) se réduit à $2h^{2\lambda}$: d'une manière générale, d'ailleurs, on a :

$$D^2[\gamma_V(L)] = 2\overline{\gamma_V(L)}^2$$

puisque dans ce cas extrême le demi-variogramme local se réduit à $\frac{1}{2}[f(L) - f(O)]^2$, le couple unique de points disponibles étant constitué de deux extrémités du segment L.

Cas particuliers. — Lorsque λ est un demi-entier, le développement (XIII,3,6) doit être traité par la méthode habituelle du passage à la limite. Pour $\lambda = 1$ (demi-variogramme linéaire), les deux développements se réduisent à :

$$\text{(XIII,3,8)} \quad \begin{cases} \mathrm{D}^2[\gamma_V(h)] = \dfrac{4}{3}\dfrac{h^3}{l} - \dfrac{1}{3}\dfrac{h^4}{l^2} & (h \leqslant l = \mathrm{L} - h) \\ \mathrm{D}^2[\gamma_V(h)] = 2h^2 + \dfrac{1}{3}l^2 - \dfrac{4}{3}hl & (h \geqslant l = \mathrm{L} - h). \end{cases}$$

Pour h très petit, la variance relative de fluctuation est $\dfrac{4}{3}\dfrac{h}{l}$, de sorte que les tous premiers points du demi-variogramme local sont représentatifs. Mais, h croissant, l'amplitude des fluctuations augmente rapidement et devient vite prohibitive. Pour $h = l = \dfrac{\mathrm{L}}{2}$, par exemple, c'est-à-dire à mi-course, la variance est l^2, et la variance relative est égale à l'unité : il ne peut plus y avoir qu'un rapport lointain entre le demi-variogramme local et sa valeur théorique $\gamma(h)$.

Comme deuxième cas particulier, examinons le demi-variogramme *de Wijsien* $\gamma(h) = \log h$. Le développement de la variance de fluctuation s'obtient en divisant les résultats précédents par λ^2 et en faisant tendre λ vers zéro. Pour $h \leqslant l$, on obtient ainsi :

$$\text{(XIII, 3, 9)} \quad \mathrm{D}^2[\gamma_V(h)] = \pi^2\frac{h}{l} - \frac{\pi^2}{6}\frac{h^2}{l^2} + \frac{1}{6}\frac{h^4}{l^4} + \frac{1}{20}\frac{h^6}{l^6} + \cdots.$$

L'estimation du demi-variogramme local. — La variance d'estimation $\mathrm{D}^2[\gamma_V(h) - \gamma_e'h)]$ du demi variogramme local (XIII,3,1) par le demi-variogramme expérimental (XIII,3,2) s'obtient en appliquant les formules générales du chapitre II au réseau des N′ points effectivement utilisés et à la fonction intrinsèque de la variable $\dfrac{1}{2}[f(x+h) - f(x)]^2$, qui est :

$$\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\left[\frac{[f(x+h)-f(x)]^2 - [f(y+h)-f(y)]^2}{4}\right] = \frac{1}{4}\mathrm{G}(0;h) - \frac{1}{4}\mathrm{G}(x-y;h).$$

Dans le cas gaussien, compte tenu de (XIII,1,7), cette fonction intrinsèque se réduit à :

$$\text{(XIII, 3, 10)} \quad 2\overline{\gamma(h)^2} - \frac{1}{2}[\gamma(x-y+h) + \gamma(x-y-h) - 2\gamma(x-y)]^2.$$

Comme h est un multiple des vecteurs de base de la maille, l'expression entre crochets a pour partie principale, lorsque le vecteur $x - y$ est intérieur à la maille élémentaire :

$$2[\gamma(h) - \gamma(x-y)].$$

Par suite, la fonction intrinsèque a elle-même comme partie principale :

$$4\gamma(h)\ \gamma(x-y) - 2\overline{\gamma(x-y)^2}.$$

Les termes irréguliers prépondérants sont, évidemment, ceux de $\gamma(x-y)$, puisque le carré de $\gamma(x-y)$ n'introduit que des termes irréguliers d'ordre supérieur. Ainsi, en première approximation, on pourra calculer la variance d'estimation du demi-variogramme local à l'aide de la fonction intrinsèque $4\gamma(h)\gamma(x-y)$. Si N et σ^2_N sont le nombre total des prèlèvements et la variance d'estimation de la teneur moyenne de V, on aura souvent, en première approximation :

$$\text{(XIII,3,11)} \qquad D^2[\gamma_V(h) - \gamma_l(h)] \# 4\gamma(h)\frac{N}{N'}\sigma^2_N.$$

Ainsi, contrairement à la variance de fluctuation, la variance d'estimation du demi-variogramme local ne prend que des valeurs modérées, et l'estimation peut se faire dans de bonnes conditions, pourvu que le nombre N′ des points utilisés ne soit pas trop faible.

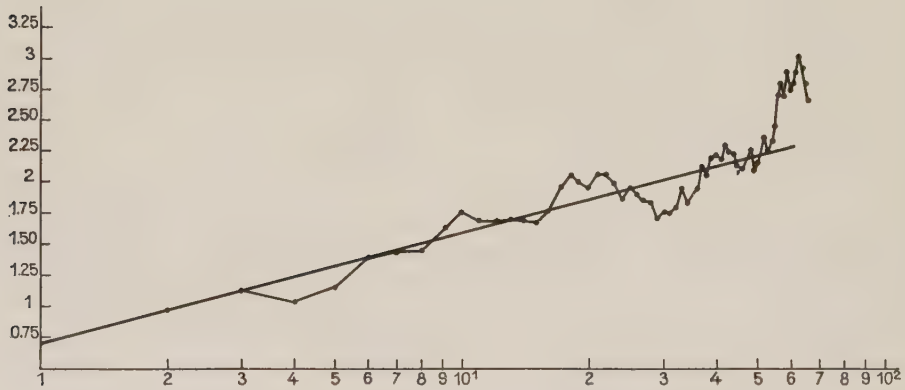

Fig. 2. — *Variogramme expérimental* dans un gisement d'uranium. Les données utilisées sont les teneurs en U des tronçons de carotte jointifs, de 50 cm, se succédant le long d'un même sondage vertical. On a travaillé, en réalité, non sur les teneurs, mais sur leurs logarithmes. *En abscisse*, les distances d, comptées en unité de 50 cm et portées en échelle logarithmique. *En ordonnée*, valeurs expérimentales de $2\gamma(d)$. Le variogramme fluctue de façon notable autour de la droite théorique représentant le schéma de De Wijs.

La conclusion générale est la suivante : *l'estimation d'un demi-variogramme local peut se faire dans des conditions satisfaisantes. Mais le demi-variogramme local lui-même n'est représentatif de la fonction intrinsèque* $\gamma(h)$ *qu'au voisinage de l'origine. Aux distances croissantes, les fluctuations s'amplifient démesurément.* On peut voir un exemple de ce phénomène sur la figure 2, qui représente le demi-variogramme des teneurs en uranium construit le long d'un sondage vertical puissant, implanté dans un gisement uranifère.

4. — Estimation et fluctuation de la variance locale.

Dans ce paragraphe, nous utiliserons de manière systématique les notations d'accroissements déjà introduites au chapitre VIII : Nous poserons, par exemple :

$$\text{(XIII,4,1)} \qquad \begin{cases} \varepsilon(x-y) = f(y) - f(x) \\ \varepsilon_{ij} = f(x_j) - f(x_i). \end{cases}$$

Dans un champ géométrique V, la variance locale S_V^2 de la variable ponctuelle $f(x)$ a déjà été définie en (VIII,4,1) comme l'intégrale stochastique :

$$S_V^2 = \frac{1}{V} \int_V [f(x) - m]^2 \, dx$$

où m est la teneur moyenne (stochastique) de $f(x)$ dans V, et nous avons montré que S_V^2 s'exprimait, en notations d'accroissements, par l'intégrale d'ordre $3n$:

$$\text{(XIII,4,2)} \quad S_V^2 = \frac{1}{V^3} \int_V \int_V \int_V \varepsilon(y-x)\, \varepsilon(y-x')\, dy\, dx\, dx'.$$

De la même manière, en présence d'un réseau fini de N prélèvements ponctuels, la variance expérimentale est donnée par :

$$\text{(XIII,4,3)} \qquad S_e^2 = \frac{1}{N^3} \sum_{ijk} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ik}.$$

Interprêtées comme des variables aléatoires, S_V^2 et S_e^2 ont, dans la théorie intrinsèque, des valeurs probables à priori, que nous appellerons ici leurs valeurs théoriques σ_V^2 et σ_e^2, et dont les expressions ont été établies au paragraphe VIII-4 :

$$\text{(XIII,4,4)} \qquad \begin{cases} \sigma_V^2 = E(S_V^2) = \dfrac{1}{V^2} \displaystyle\int_V \int_V \gamma(x-x')\, dx\, dx' \\ \sigma_e^2 = E(S_e^2) = \dfrac{1}{N^2} \displaystyle\sum_{ij} \gamma(x_i - x_j). \end{cases}$$

Fluctuation de la variance locale. — Les fluctuations de la variable aléatoire S_V^2 définie en (XIII,4,2) sont caractérisées par leur variance à priori :

$$D^2(S_V^2) = E(S_V^4) - \overline{E(S_V^2)^2} = E(S_V^4) - \sigma_V^4.$$

En notation d'accroissement, le carré S_V^4 de la variance locale peut s'écrire :

$$\text{(XIII,4,5)} \quad S_V^4 = \frac{1}{V^6} \int_{V^6} \varepsilon_{ji} \varepsilon_{ki} \varepsilon_{ml} \varepsilon_{pl}\, dx_i\, dx_j\, dx_k\, dx_m\, dx_p\, dx_l.$$

C'est une intégrale stochastique multiple d'ordre $6n$. Pour obtenir sa valeur probable, nous devons en premier lieu calculer le moment d'ordre

$4\mathrm{E}(\varepsilon_{ji}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{ml}\varepsilon_{pl})$, puis intégrer le résultat obtenu. Dans le cas général, on doit appliquer la formule (XIII,1,5). Dans ce qui suit, cependant, nous nous limiterons *au cas gaussien* qui conduit à des résultats plus simples, et par suite nous appliquerons (XIII,1,3). Pour simplifier les calculs, nous remarquerons que (XIII,1,1) nous donne, en premier lieu :

$$\mathrm{E}(\varepsilon_{ji}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{ml}\varepsilon_{pl}) = \mathrm{E}(\varepsilon_{ji}\varepsilon_{ki})\mathrm{E}(\varepsilon_{ml}\varepsilon_{pl}) + \mathrm{E}(\varepsilon_{ji}\varepsilon_{ml})\mathrm{E}(\varepsilon_{ki}\varepsilon_{pl}) + \mathrm{E}(\varepsilon_{ji}\varepsilon_{pl})\mathrm{E}(\varepsilon_{ki}\varepsilon_{ml}).$$

Lorsque l'on effectue l'intégration (XIII,4,5), le premier de ces trois termes donne, d'après (XIII,4,2), le carré de $\mathrm{E}(S_V^2)$, c'est-à-dire σ_V^4, Par suite, la variance de fluctuation $\mathrm{D}^2(S_V^2)$ s'obtient en intégrant les deux derniers termes : ceux-ci d'ailleurs, donnent le même résultat, par raison de symétrie, de sorte qu'il suffit de calculer l'un d'entre eux, et d'écrire :

$$\mathrm{D}^2(S_V^2) = \frac{2}{V^6}\int_{V^6} \mathrm{E}(\varepsilon_{ji}\varepsilon_{ml})\mathrm{E}(\varepsilon_{ki}\varepsilon_{pl})\, dx_i\, dx_j\, dx_k\, dx_l\, dx_m\, dx_p.$$

Appliquons la formule générale (VIII,1,9), qui nous donne :

$$\mathrm{E}(\varepsilon_{ji}\varepsilon_{ml})\mathrm{E}(\varepsilon_{ki}\varepsilon_{pl}) = [\gamma_{jl} + \gamma_{im} - \gamma_{jm} - \gamma_{il}]\,[\gamma_{kl} + \gamma_{ip} - \gamma_{kp} - \gamma_{il}].$$

Dans le développement du produit des deux crochets du second membre, apparaissent trois types de termes : des termes carrés de la forme $\overline{\gamma_{ij}}^2$. des termes où un indice est répété, de la forme $\gamma_{ij}\gamma_{ik}$, et enfin des termes à 4 indices distincts du type $\gamma_{ij}\gamma_{kl}$. Dans l'intégration, les termes d'une même espèce conduisent à la même valeur numérique. Des simplifications se produisent : il reste un seul terme de première et un seul de troisième espèce, tous deux avec le signe $+$, et deux de deuxième espèce, avec le signe $-$. On obtient alors l'expression de la variance de fluctuation sous la forme :

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{D}^2(S_V^2) = \frac{2}{V^4}\int_{V^4}\gamma_{ij}\gamma_{kl}\, dx_i\, dx_j\, dx_k\, dx_l + \frac{2}{V^2}\int_{V^2}\overline{\gamma_{ij}}^2\, dx_i\, dx_j \\ - \frac{4}{V^3}\int_{V^3}\gamma_{ij}\gamma_{ik}\, dx_i\, dx_j\, dx_k.\end{aligned}\right.$$

En ce qui concerne l'intégrale d'ordre $4n$, compte tenu de (XIII, 4, 4). on a la simplification immédiate :

$$\frac{1}{V^4}\int_{V^4}\gamma_{ij}\gamma_{kl}\, dx_i\, dx_j\, dx_k\, dx_l = \left[\frac{1}{V^2}\int_{V^2}\gamma_{ij}\, dx_i\, dx_j\right]^2 = \sigma_V^4.$$

D'où finalement la variance de fluctuation, qui s'écrit de manière plus explicite :

(XIII,4,6)

$$\mathrm{D}^2(S_V^2) = 2\sigma_V^4 + \frac{2}{V^2}\int_{V^2}\gamma(x-y)^2\, dx\, dy - \frac{4}{V^3}\int_{V^3}\gamma(y-x)\,\gamma(y-x')\, dx\, dx'\, dy.$$

En vue des calculs pratiques, on remarquera que l'intégrale d'ordre $3n$ peut se simplifier à l'aide de l'algorithme suivant :

$$\text{(XIII,4,7)}\qquad \int_{V^3}\gamma(y-x)\,\gamma(y-x'\ dx\, dx'\, dy = \int_V dy\left[\int_V \gamma(y-x)\, dx\right]^2$$

Dans le cas d'une variance expérimentale S_e^2, la variance de fluctuation $D^2(S_e^2)$ de S_e^2, par rapport à sa valeur théorique, s'obtient immédiatement en remplaçant les intégrales par des sommes :

$$(\text{XIII,4,8}) \quad D^2(S_e^2) = 2\sigma_e^4 + \frac{2}{N^2}\sum_{ij}\overline{\gamma(x_i - x_j)^2} - \frac{4}{N^3}\sum_{ijk}\gamma(x_i - x_j)\,\gamma(x_i - x_k).$$

On se gardera de confondre cette variance de fluctuation avec la variance d'estimation $D^2(S_V^2 - s_e^2)$ de la variance locale par la variance expérimentale.

EXEMPLE :

Fonction intrinsèque h^λ et une dimension. — Pour éclairer la signification du résultat théorique (XIII,4,6), et mettre en évidence l'ampleur considérable de la fluctuation d'une variance locale, nous allons effectuer les calculs pour la fonction intrinsèque $\gamma(h) = h^\lambda$, un espace à une seule dimension et un champ géométrique constitué par un segment de longueur L. A une dimension, et compte tenu de (XIII,4,7), la formule générale (XIII,4,6) peut s'expliciter à l'aide des fonctions auxiliaires $\chi(h)$ et $F(h)$ définies en (XII,3,1). On trouve facilement :

$$(\text{XIII,4,9}) \quad \begin{cases} D^2(S_V^2) = \overline{2F(L)^2} + \dfrac{4}{L^2}\displaystyle\int_0^L (L - x)\,\overline{\gamma(x)^2}\,dx \\ \quad -\dfrac{8}{L^3}\displaystyle\int_0^L x^2\overline{\chi(x)^2}\,dx - \dfrac{8}{L^3}\int_0^L x(L - x)\,\chi(x)\,\chi(L - x)\,dx. \end{cases}$$

Avec la fonction intrinsèque h^λ, on a :

$$\begin{cases} \chi(x) = \dfrac{1}{\lambda + 1}\,x^\lambda \\ F(x) = \dfrac{2}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}\,x^\lambda \end{cases}$$

et (XIII, 4, 9) se met facilement sous la forme :

$$D^2(S_V^2) = L^{2\lambda}\left[\frac{8}{(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)^2} + \frac{4}{(2\lambda + 1)(2\lambda + 2)} - \frac{8}{(2\lambda + 3)(\lambda + 1)^2} - \frac{2^{-2\lambda}\sqrt{\pi}}{\lambda + 1}\,\frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{5}{2}\right)}\right].$$

On remarquera que la variance relative $\dfrac{1}{F(L)^2}\,D^2(S_V^2)$ de la fluctuation est constante et indépendante de L. Elle ne dépend que de λ :

$$(\text{XIII,4,10}) \quad \frac{1}{\sigma_V^4}\,D^2(S_V^2) = 2 + \frac{(\lambda + 1)(\lambda + 2)^2}{2(2\lambda + 1)} - \frac{2(\lambda + 2)^2}{2\lambda + 3} - \frac{\sqrt{\pi}(\lambda + 2)}{2^{2+2\lambda}}\,\frac{\Gamma(\lambda + 3)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{5}{2}\right)}.$$

Par exemple, pour $\lambda = 1$, on obtient une variance relative de fluctuation égale à $\frac{4}{5}$. D'une manière générale, on voit que les fluctuations de la variance locale ont toujours une ampleur considérable, et par suite la variance locale elle-même n'a, le plus souvent, qu'un lointain rapport avec sa valeur théorique.

Estimation de la variance locale : le biais. — Lorsque l'on estime la variance locale S_V^2 définie en (XIII,4,2) à l'aide de la variance expérimentale S_e^2, définie en (XIII,4,3), et calculée à partir d'un réseau régulier de prélèvements ponctuels en nombre fini N, il s'introduit nécessairement une erreur systématique, ou biais. En effet, — cela est visible sur les relations (XIII,4,4) — les variables aléatoires S_V^2 et S_e^2 n'ont pas la même valeur probable à priori. Nous appellerons *biais*, et nous désignerons par σ_B^2, la différence :

$$(\text{XIII,4,11}) \quad \sigma_B^2 = E(S_V^2) - E(S_e^2) = \sigma_V^2 - \sigma_e^2 = \frac{1}{V^2}\int_{V^2} \gamma(x - x')\, dx\, dx' - \frac{1}{N^2}\sum_{ij} \gamma(x_i - x_j).$$

Ce biais se présente comme la différence entre valeur exacte et approchée d'une même intégrale intéressant la fonction intrinsèque $\gamma(h)$. Son expression rappelle celle d'une variance d'estimation. Si l'on suppose les points de prélèvements $x_i x_j \ldots$ implantés au hasard dans le champ V, $\gamma(x_i - x_j)$ doit être remplacé par sa valeur probable relativement à ce tirage au sort, qui est σ_V^2 pour $i \neq j$. Ainsi, dans le cas de la maille aléatoire pure, on a :

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{N}\sigma_V^2.$$

Cette expression du biais coïncide à la fois avec celle que donne la théorie classique de l'estimation des variances et avec celle de la variance d'estimation associée à une maille aléatoire pure par la formule (XII,5,1). Dans le cas d'une maille aléatoire stratifiée, on peut voir facilement que le biais est égal à :

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{N}\sigma^2(0|\rho)$$

c'est-à-dire ici encore, d'après (XII,5,2), à la variance d'estimation correspondante.

Examinons maintenant le cas d'une maille régulière. En ce qui concerne le biais σ_B^2, on peut voir sur (XIII,4,11) qu'il est strictement indifférent de supposer l'implantation de la maille régulière préférentielle ou flottante, car il n'apparaît aucun terme mixte exprimant une covariance entre V et le réseau. Plaçons-nous dans le cas où V est la réunion des N zones d'influences, égales entre elles, des N prélèvements, et soit $K(h)$ le

covariogramme géométrique associé à V. L'algorithme de Cauchy (I,2,9) donne :

$$\frac{1}{V^2}\int_{V^2}\gamma(x-x')\,dx\,dx' = \frac{1}{V^2}\int K(h)\,\gamma(h)\,dh.$$

D'autre part, les vecteurs $x_i - x_j$ sur lesquels porte la somme double de (XIII,4,11) sont des multiples entiers $ka = (k_1a_1, \ldots k_na_n)$ des vecteurs de base de la maille. Mais le nombre de couples x_ix_j pour lesquels le vecteur $x_i - x_j$ est égal à un vecteur donné ka est égal à $\frac{1}{v}\,K(ka)$, v étant le volume de la maille élémentaire et $K(ka)$ l'intersection de V et de son translaté par ka. On a donc :

$$\frac{1}{N^2}\sum_{ij}\gamma(x_i - x_j) = \frac{v}{V^2}\sum_{k} K(ka)\,\gamma(ka).$$

Alors le biais (XIII,4,11) se met sous la forme :

$$(\text{XIII,4,12}) \quad \sigma_B^2 = \frac{1}{V^2}\int K(h)\,\gamma(h)\,dh - \frac{v}{V^2}\sum_{k} K(ka)\,\gamma(ka).$$

On reconnaît l'expression de la variance d'estimation transitive associée à la maille a et au covariogramme $-K(h)\,\gamma(h)$. Il suffit alors de comparer avec la relation (XII,4,6) pour énoncer le résultat suivant :

Le biais σ_B^2 associé à l'estimation de la variance locale par une maille régulière, est identique à la variance d'estimation de la teneur moyenne calculée pour la même maille régulière, prise avec une implantation flottante et un champ géométrique V connu à priori.

Dans beaucoup d'applications pratiques le biais peut être considéré comme négligeable.

Estimation de la variance locale : la dispersion. — Nous caractériserons l'écart entre la variance locale vraie S_V^2 et la variance expérimentale S_ε^2 calculée sur un réseau de prélèvements en nombre fini par la variance d'estimation :

$$(\text{XIII,4,13}) \quad D^2[S_V^2 - S_\varepsilon^2] = D^2(S_V^2) + D^2(S_\varepsilon^2) - 2E(S_V^2 S_\varepsilon^2) + 2\sigma_V^2\sigma_\varepsilon^2.$$

Les variances à priori (ou variances de fluctuation) $D^2(S_V^2)$ et $D^2(S_\varepsilon^2)$ ont déjà été calculées en (XIII,4,6) et (XIII,4,8). Il reste à évaluer $E(S_V^2 S_\varepsilon^2)$. Nous reportant aux définitions (XIII,4,2) et (XIII,4,3) des variances locales et expérimentales, nous obtenons en premier lieu :

$$S_V^2 S_\varepsilon^2 = \frac{1}{N^3V^3}\sum_{ijk}\int_{V^3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}\varepsilon(y-x)\,\varepsilon(y-x')\,dx\,dx'\,dy.$$

Passons aux valeurs probables, toujours en nous limitant au cas gaussien. On a, d'après (XIII,1,1) :

$$\begin{aligned}E[\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}\varepsilon(y-x)\,\varepsilon(y-x')] &= E(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik})\,E[\varepsilon(y-x)\,\varepsilon(y-x')] \\ &+ E[\varepsilon_{ij}\varepsilon(y-x)]\,E[\varepsilon_{ik}\varepsilon(y-x')] + E[\varepsilon_{ij}\varepsilon(y-x')]\,E[\varepsilon_{ik}\varepsilon(y-x)].\end{aligned}$$

Par sommation en ijk et intégration en x, x' et y, le premier de ces trois termes donne $\mathrm{E}(S_e^2)\,\mathrm{E}(S_V^2) = \sigma_e^2\sigma_V^2$, tandis que les deux autres, par raison de symétrie, conduisent à une même valeur. Il suffit de calculer l'un d'entre eux, par exemple :

$$\mathrm{E}[\varepsilon_{ij}\varepsilon(y-x)]\,\mathrm{E}[\varepsilon_{ik}\varepsilon(y-x')] = [\gamma(x_i-y)+\gamma(x_j-x)-\gamma(x_i-x)-\gamma(x_j-y)] \times [\gamma(x_i-y)+\gamma(x_k-x')-\gamma(x_i-x')-\gamma(x_k-y)].$$

En développant le produit des crochets du second membre, il apparaît quatre types de termes : termes en $\gamma(x_i-y)\,\gamma(x_j-y$, en $\gamma(x_i-y)\,\gamma(x_i-x)$, en $\gamma(x_i-y)\,\gamma(x_j-x)$ et termes carrés de la forme $\overline{\gamma(y-x_i)^2}$. Les termes de même espèce, après sommation et intégration, conduisent à une même valeur. Des simplifications apparaissent, et, finalement, chacune de ces quatre valeurs ne subsiste qu'une seule fois avec le signe — pour les deux premières et le signe + pour les deux dernières. On obtient ainsi la covariance de S_V^2 et S_e^2 sous la forme :

XIII,4,14)
$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{E}[S_V^2 S_e^2] - \sigma_V^2\sigma_e^2 = &-\frac{2}{VN^2}\sum_{ij}\int_V \gamma(x-x_i)\,\gamma(x-x_j)\,dx \\ &-\frac{2}{NV^2}\sum_{i}\int_{V^2}\gamma(x-x_i)\,\gamma(x'-x_i)\,dx\,dx' \\ &+\frac{2}{N^2V^2}\sum_{ij}\int_{V^2}\gamma(x-x_i)\,\gamma(x'-x_j)\,dx\,dx' \\ &+\frac{2}{NV}\sum_{i}\int_V \overline{\gamma(x-x_i)^2}\,dx.\end{aligned}\right.$$

On notera de plus la simplification suivante :

$$\frac{1}{N^2V^2}\sum_{ij}\int_{V^2}\gamma(x-x_i)\,\gamma(x'-x_j)\,dx\,dx' = \left[\frac{1}{NV}\sum_{i}\int_V \gamma(x-x_i)\,dx\right]^2.$$

L'expression entre crochets est liée étroitement à la variance d'estimation σ_N^2 de la teneur moyenne de V par le réseau des N prélèvements x_i. En effet, la formule générale (XII,2,1) peut s'écrire :

$$\sigma_N^2 = \frac{2}{NV}\sum_{i}\int_V \gamma(x-x_i)\,dx - \sigma_e^2 - \sigma_V^2$$

d'où l'on tire immédiatement

(XIII,4,15) $$\frac{4}{N^2V^2}\left[\sum_{i}\int_V \gamma(x-x_i)\,dx\right]^2 = [\sigma_N^2 + \sigma_e^2 + \sigma_V^2]^2.$$

Compte tenu de cette simplification, portons (XIII,4,14) dans (XIII,4,13) et remplaçons aussi $D^2(S_V^2)$ et $D^2(S_e^2)$ par leurs expressions (XIII,4,6) et (XIII,4,8), et la différence $\sigma_V^2 - \sigma_e^2$ par σ_B^2, qui est le biais (XIII,4,11).

On obtient ainsi la dispersion de la variance expérimentale relativement à la variance locale sous la forme suivante :

(XIII,4,16)

$$
\begin{aligned}
&D^2[S_V^2 - S_e^2] = \sigma_B^4 - 2\sigma_N^2(\sigma_V^2 + \sigma_e^2) - \sigma_N^4 \\
&+ \frac{2}{V^2}\int_{V^2} \gamma(x-x')^2\,dx\,dx' + \frac{2}{N^2}\sum_{ij}\gamma(x_i-x_j)^2 - \frac{4}{NV}\sum_i \int_V \gamma(x-x_i)^2\,dx \\
&- \frac{4}{V^3}\int_{V^3} \gamma(y-x)\,\gamma(y-x')\,dx\,dx'\,dy \\
&+ \frac{4}{NV^2}\sum_i \int_{V^2} \gamma(x_i-x)\,\gamma(x_i-x')\,dx\,dx' \\
&+ \frac{4}{N^2V}\sum_{ij}\int_V \gamma(x-x_i)\,\gamma(x-x_j)\,dx - \frac{4}{N^3}\sum_{ijk}\gamma(x_i-x_j)\,\gamma(x_i-x_k).
\end{aligned}
$$

Nous n'insisterons pas davantage sur le calcul de la variance $D^2(S_V^2 - S_e^2)$, qui est assez difficile à effectuer explicitement. Mais la structure de la formule (XIII,4,16), où alternent des expressions exactes et approchées de mêmes intégrales, montre que $D^2(S_V^2 - S_e^2)$ est bien de la même nature que les variances d'estimation rencontrées au chapitre XII : l'estimation d'une variance locale par une variance expérimentale est donc, en général, possible. Cependant, la variance d'estimation $D^2(S_V^2 - S_e^2)$ prend le plus souvent des valeurs notablement supérieures à celles que donne la statistique mathématique usuelle dans le cas où les $f(x_i)$ sont N variables aléatoires indépendantes de même valeur probable et de même variance σ_V^2.

TROISIÈME PARTIE

APPLICATIONS A LA GÉOSTATISTIQUE

CHAPITRE XIV

LE SCHÉMA DE WIJSIEN

SOMMAIRE

Ce chapitre est consacré au schéma de Wijsien isotrope $\gamma(r) = 3\alpha \log r$, *fréquemment utilisé pour décrire des gisements métalliques. Le coefficient* 3α *s'appelle* dispersion absolue.

Paragraphe 1. — *Dans le cas où l'échantillon* v *est géométriquement semblable à son champ* V, *la variance de* v *dans* V *est* $\sigma^2(v|V) = \alpha \log \frac{V}{v}$ *(formule de de Wijs). Plus généralement, si* v *et* V *sont quelconques, et si* l *et* L *sont leurs* équivalents linéaires, *on a* $\sigma^2(v|V) = 3\alpha \log \frac{L}{l}$. *On donne des expressions exactes ou approchées de ces équivalents pour diverses figures (rectangle, parallélogramme, triangle, trapèze, parallélépipèdes rectangles et obliques).*

Paragraphe 2. — *A titre d exemple, on établit l'expression explicite de la variance d'estimation dans un gisement stratiforme ou filonien de faible puissance, reconnu par travaux miniers (traçages et montages).*

Paragraphe 3. — *Exposé de la théorie du krigeage continu en schéma de wijsien isotrope à deux dimensions. On met en évidence le* caractère markovien *de ce schéma : une fois connues les valeurs prises par la variable sur un contour fermé* (C), *il y a absence de corrélations entre l'intérieur et l'extérieur de* (C). (*Théorème* de l'écran périphérique). *La théorie des potentiels permet de déterminer explicitement la fonction de pondération à partir de la fonction de Green. Application au krigeage continu sur deux traçages parallèles, et énoncé du théorème du centre de gravité.*

1. — Les équivalents linéaires.

Dans cette troisième et dernière partie, nous allons donner quelques exemples d'application de la théorie des schémas intrinsèques à l'estimation des gisements miniers, sans chercher cependant à faire un exposé complet et systématique des méthodes de la Géostatistique [1]. Dans un assez grand

[1] *Traité de Géostatistique Appliquée*, G. Matheron. Technip, Paris, tome I, 1962, Tome II (le krigeage) 1963, et Tome III (l'effet de pépite et les phénomènes de transition) à paraître.

nombre de gisements métallifères (ou, du moins, dans des parties, ou panneaux, géostatistiquement homogènes de ceux-ci), il est possible de décrire correctement la distribution des teneurs dans l'espace à l'aide d'un schéma intrinsèque de Wijsien, c'est-à-dire un schéma intrinsèque caractérisé par un demi-variogramme $\gamma(h)$ vérifiant la relation (VIII,4,9)

$$\gamma(\lambda h) = \gamma(h) + 3\alpha \log |\lambda|.$$

La constante 3α est appelée *dispersion absolue* du schéma de Wijsien. Dans les applications pratiques, on utilise surtout le schéma de Wijsien isotrope, défini par la fonction intrinsèque isotrope :

$$\text{(XIV,1,1)} \qquad \gamma(r) = 3\alpha \log r.$$

Lorsqu'il existe une anisotropie, on cherche toujours à se ramener à cette forme (XIV,1,1), soit en effectuant une transformation linéaire convenable des coordonnées (anisotropie géométrique), soit en superposant différentes composantes zonales de wijsiennes, conformément aux règles générales exposées au paragraphe VIII,2.

On remarquera que la fonction intrinsèque de Wijsienne ne s'annule pas en $r = 0$, mais prend une valeur infinie négative. Cette circonstance implique en principe, pour les valeurs de la variable ponctuelle, des variances d'extension ou des variances locales infinies. En fait on n'utilise jamais le schéma de wijsien pour décrire des variables ponctuelles, mais seulement des variables à support non ponctuel, régularisées par des fonctions de pondération ou de prélèvement. Comme tous les régularisés du demi-variogramme $\log r$ s'annulent à l'origine, la difficulté signalée à l'instant perd toute importance. En fait, les supports utilisés, ou volume des échantillons prélevés, doivent toujours êtres grands vis-à-vis des dimensions de la granulométrie du minerai. Au niveau ponctuel, les teneurs ont des variances réelles finies, mais très grandes vis-à-vis de celles des échantillons macroscopiques. La variance infinie que leur attribue le schéma de wijsien est une simple idéalisation de cette propriété réelle qui n'empêche nullement une description correcte des teneurs au niveau macroscopique (1).

La variance d'un échantillon v dans un champ V est donnée par la formule générale (VIII,4,4), qui s'écrit ici :

$$\text{(XIV,1,2)} \quad \sigma^2(v|\mathrm{V}) = \frac{3\alpha}{\mathrm{V}^2}\int_{\mathrm{V}}\int_{\mathrm{V}} \log|x - x'|\,dx\,dx' - \frac{3\alpha}{v^2}\int_v\int_v \log|x - x'|\,dx\,dx'.$$

Dans le cas particulier où v et V sont géométriquement semblables, cette variance est donnée par la formule de de Wijs, déjà établie en (VIII,4,10) :

$$\text{(XIV,1,3)} \qquad \sigma^2(v|\mathrm{V}) = \alpha \log \frac{\mathrm{V}}{v}.$$

(1) Utilisant les résultats du chapitre x, on voit que la fonction intrinsèque $3\alpha \log r$ définit un schéma intrinsèque de distribution : mais, dès que l'on passe aux régularisées, cette distribution devient une fonction, c'est-à-dire une variable régionalisée au sens habituel.

Mais cette formule simple, qui exprime un principe de similitude, n'est pas applicable si v et V ont des formes quelconques. Elle peut se généraliser, cependant, grâce à la *notion d'équivalence de deux échantillons* v. Nous dirons que deux échantillons v et v' sont équivalents (pour le schéma de Wijsien) s'ils ont même variance, en schéma de Wijsien, dans un même champ V quelconque. Posons :

$$\text{(XIV,1,4)} \qquad F(v) = \frac{1}{v^2} \int_v \int_v \log |x - x'| \, dx \, dx'.$$

Cette fonction $F(v)$, qui représente la valeur moyenne de $\log r$ dans v, dépend non seulement de la mesure, mais aussi de la forme du volume v. La formule (XIV,1,2) peut s'écrire :

$$\text{(XIV,1,5)} \qquad \sigma^2(v|V) = 3\alpha[F(V) - F(v)].$$

Il en résulte immédiatement que, pour que deux échantillons v et v' soient équivalents, il faut et il suffit que l'on ait :

$$F(v) = F(v').$$

Cette équivalence est indépendante de la dispersion absolue, et possède par suite une signification purement géométrique. Une classe de cette équivalence, c'est-à-dire l'ensemble de tous les échantillons équivalents à un échantillon v, est caractérisée par la valeur commune de $F(v)$. En particulier, il existe, dans cette classe, un segment de droite de longueur l, telle que

$$F(l) = \log l - \frac{3}{2} = F(v).$$

Ce segment de longueur l est appelé *équivalent linéaire* de v. Il est commode de caractériser une classe d'échantillons équivalents par leur équivalent linéaire commun

$$\text{(XIV,1,6)} \qquad \log l = F(v) + \frac{3}{2}.$$

Désignons alors par l et L les équivalents linéaires respectifs d'un échantillon v et de son champ V. En portant (XIV,1,6) dans (XIV,1,5), il vient immédiatement :

$$\text{(XIV,1,7)} \qquad \sigma^2(v|V) = 3\alpha \log \frac{L}{l}.$$

Cette généralisation de la formule de de Wijs permet un calcul rapide de la variance, si la dispersion absolue est connue, ou, inversement, elle permet d'estimer 3α à partir de la valeur expérimentale de la variance si les équivalents linéaires L et l sont connus, au moins approximativement.

Exemples : Dans un espace à deux dimensions, l'équivalent linéaire $L(a, b)$ du *rectangle* de côtés (a, b) découle immédiatement de l'expression (XI,3,12) de la valeur moyenne $F(a, b)$ de $\log r$ dans ce rectangle. On a (avec $b \leqslant a$) :

$$\text{(XIV,1,8)} \quad \log[L(a, b)] = \log a + \frac{\pi}{3}\frac{b}{a} + \frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\left[\log\frac{b}{a} - \frac{25}{12}\right] + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)(k+1)(2k-1)(2k+1)}\frac{b^{2k}}{a^{2k}}.$$

Des formules exactes peuvent être obtenues pour un parallélogramme, un triangle, et, en procédant de proche en proche, on peut calculer l'expression exacte de l'équivalent linéaire d'un polygône quelconque : les calculs sont assez compliqués, et on utilise plutôt, en pratique, les expressions approchées que nous donnons un peu plus loin.

De même, dans l'espace à 3 dimensions, l'équivalent linéaire du parallélépipède rectangle de côtés (a, b, c) s'obtient à partir des formules du paragraphe XI-4. Nous ne donnerons que les premiers termes de son développement. Avec $a \geqslant b \geqslant c$, on a :

$$\text{(XIV,1,9)} \quad \left\{\begin{aligned}
\log L(a, b, c) &= \log a + \frac{\pi}{3}\frac{b}{a} + \frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\log\frac{b}{a} \\
&\quad - \frac{25}{72}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{180}\frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{1\,680}\frac{b^6}{a^6} + \cdots \\
&\quad + \frac{c^2}{b^2}\left[\frac{\pi}{6}\left(\log 2 + \frac{1}{12}\right)\frac{b}{a} + \frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\log\frac{b}{a}\right. \\
&\quad \left. - \frac{5}{12}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{216}\frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{1\,800}\frac{b^6}{a^6} + \cdots\right] \\
&\quad - \frac{\pi}{6}\frac{c^2}{ab}\log\frac{c}{b} + \frac{\pi}{15}\frac{c^3}{b^3}\left[\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right] \\
&\quad + \frac{c^4}{b^4}\left[-\frac{\pi}{120}\frac{b}{a} - \frac{127}{1\,800}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{180}\frac{b^4}{a^4}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1\,800}\frac{b^6}{a^6} + \cdots\right] + \frac{1}{30}\frac{c^4}{a^2b^2}\log\frac{c}{b} \\
&\quad + \frac{c^6}{b^6}\left[\frac{\pi}{2\,688}\frac{b}{a} - \frac{1}{1\,008}\frac{b^2}{a^2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1\,680}\frac{b^6}{a^6} + \cdots\right] + \cdots.
\end{aligned}\right.$$

Cette fonction a été tabulée et présentée sous forme d'abaques. On trouve, en particulier, que le cube de côté a est équivalent à 2,7 a, tandis que le carré de côté a est équivalent à 2,004 a, c'est-à-dire pratiquement à 2 a.

Équivalents linéaires approchés. — Des formules d'approximation simples permettent de calculer rapidement, avec une précision suffisante

pour les applications, les équivalents de divers polygônes et polyèdres. Par exemple :

— *Pour un rectangle* de côtés a et b, on a, avec une précision meilleure que 1 % :

$$L = a + b.$$

— *Pour un parallélogramme* de côtés a, b et de surface $S = ab \sin \varphi$:

$$L = \sqrt{a^2 + b^2 + 2S} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \sin \varphi}.$$

— *Pour un triangle*, de côtés a, b, c, et de surfaces S :

$$L = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + 2S}.$$

— *Pour un trapèze*, de bases a et b, de surfaces S et admettant une médiane, ou segment joignant les milieux des deux bases, de longueur m, on prend la demi-somme $l = \frac{a+b}{2}$ et la demi-différence $l' = \frac{a-b}{2}$ des deux bases, et on a :

$$L = \sqrt{l^2 + l'^2 + m^2 - \frac{1}{3}\frac{m^2 l'^2}{l^2} + 2S}.$$

— *Pour le parallélépipède rectangle*, de côtés $a \geqslant b \geqslant c$, on a une valeur grossièrement approchée de (XIV,1,9), en prenant :

$$L = a + b + \frac{c}{2}.$$

— *Pour un parallélépipède oblique* (ou rectangle) d'arêtes r_1, r_2, r_3, de faces S_1, S_2, S_3 et de volume V, on pose

$$\begin{cases} R^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \\ S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \end{cases}$$

et on a la formule approchée :

$$L = \sqrt{R^2 + 2S + \frac{V^2 R^2}{S^3}}.$$

Naturellement, le fait que deux échantillons v et v' soient équivalents n'implique que l'égalité de leurs variances dans un même champ V, et non pas, par exemple, l'égalité des variances d'estimation dans le prélèvement d'échantillons v ou v' selon un même réseau : l'égalité des variances n'entraîne pas celle des covariances. Néanmoins, la notion d'équivalence permet de comparer grossièrement, des échantillonnages de nature différente. En pratique, elle est surtout utilisée pour procéder à une estimation rapide, à partir d'une variance expérimentale, de la dispersion absolue 3α d'un gisement, dont on admet au départ, et sous réserve de confirmation par des études expérimentales plus approndies, qu'il est de wijsien et isotrope.

2. — Reconnaissance d'un filon par traçages et montages.

A titre d'exemple, nous allons traiter avec quelques détails le problème de la reconnaissance d'un gisement filonien par travaux miniers. Les accumulations, ou poids de métal au mètre carré d'éponte, définissent dans le plan du filon une variable régionalisée à deux dimensions, dont nous supposerons qu'elle peut être décrite par un schéma intrinsèque de wijsien et isotrope. Les travaux miniers exécutés ont consisté à tracer N niveaux équidistants, une même relevée h, comptée dans le plan du filon, séparant deux niveaux consécutifs. La démarche à suivre, dans le calcul de la variance d'estimation, est la suivante :

A) Supposons, en premier lieu, que les N niveaux tracés aient tous la même longueur l, et qu'ils aient été échantillonnés de façon parfaite, de telle manière que leurs teneurs (ou accumulations moyennes) $t_1, t_2 \ldots t_N$ soient parfaitement connues. L'erreur d'estimation est uniquement imputable à l'extension de ces teneurs dans les zones d'influences des différents traçages. Dans le dispositif dit centré, chacune de ces zones d'influence est constituée par la réunion des deux demi-étages de relevées $\frac{h}{2}$ situés à l'amont et à l'aval immédiat de chacun des traçages. Si le dispositif est du type fermé, c'est-à-dire si l'on veut estimer le panneau compris entre le premier et le dernier niveau reconnu, on sait, d'après le paragraphe XII,3, que la variance d'estimation σ_N^2 pourra se calculer comme en dispositif centré, à condition de remplacer N par $N - 1$. Enfin, le calcul de la variance d'estimation σ_N^2 elle-même se conduit en appliquant les résultats de (XII,3) au demi-variogramme $\gamma(h)$ obtenu en effectuant sur $3\alpha \log r$ une montée intrinsèque d'ordre 1 sous puissance l constante. L'expression de ce $\gamma(h)$ a déjà été écrite en (XI,2,13). Elle a comme partie principale le terme $3\alpha\pi\frac{h}{l}$ lorsque la relevée h est inférieure à l'allongement l. La règle de correspondance (XII,2,3) nous donne, toujours pour $h < l$, la partie principale de la variance d'estimation :

$$\text{(XIV,2,1)} \qquad \sigma_N^2 = \frac{\alpha}{N}\frac{\pi}{2}\frac{h}{l}.$$

On peut vérifier que les termes d'ordre supérieur n'apportent qu'une faible contribution, de sorte que la formule (XIV,2,1) reste utilisable jusqu'en $h = l$.

Toutefois, pour $h > l$, la variance d'estimation ne peut plus se calculer par simple application terme à terme de la règle de correspondance (XII,2,3) parce que le développement analytique (XI,2,13) du $\gamma(h)$ a changé de nature en $h = l$. Conformément à la règle pratique (XII,3,13) on doit dans ce cas calculer σ_N^2 à partir du principe de composition des variances d'extension élémentaires :

$$\text{(XIV,2,2)} \qquad \sigma_N^2 = \frac{1}{N}\sigma_E^2 = \frac{1}{N}\left[2\chi\left(\frac{h}{2}; l\right) - F(h, l)\right].$$

La fonction auxiliaire $F(h, l)$ est donnée par la première relation (XI,3,12) et $\chi(h)$ s'en déduit par dérivation en h, conformément à (XI,3,5). Sous forme explicite, on obtient dans le cas $h \geqslant 2l$:

$$\text{(XIV,2,3)} \quad \sigma_N^2 = \frac{3\alpha}{N}\left[1 - 2\log 2 + \log\frac{h}{l} + \frac{\pi}{3}\frac{l}{h} - \frac{1}{6}\frac{l^2}{h^2}\log\frac{l}{h} - \frac{23}{72}\frac{l^2}{h^2} + \frac{11}{60}\frac{l^4}{h^4} - \frac{257}{1\,680}\frac{l^6}{h^6} + \cdots\right].$$

Dans le cas $l < h < 2l$, on a une expression un peu plus compliquée, puisque $\chi\left(\frac{h}{2}\right)$ se développe en $\frac{h}{l}$ et $F(h, l)$ en l/h. Naturellement, ces diverses formules ont été tabulées et présentées sous forme d'abaques.

B) Supposons maintenant que les divers traçages aient des allongements différents $l_1 l_2 \ldots l_n$. On prend comme estimateur la moyenne des t_i pondérée par les allongements l_i

$$\text{(XIV,2,4)} \qquad t = \frac{t_1 l_1 + \cdots + t_n l_N}{l_1 + l_2 + \cdots + l_N}.$$

Dans le cas où le principe de composition des variances d'extension élémentaires est applicable, c'est-à-dire pour $h \geqslant l$, chacune des accumulations t_i s'étend à sa zone d'influence $l_i h$ indépendamment des autres, de sorte que la variance d'estimation s'obtient en pondérant chacune des variances d'extension élémentaires $\sigma_{E_i}^2$ par le carré de la zone d'influence correspondante. Cela donne :

$$\text{(XIV,2,5)} \qquad \sigma_N^2 = \frac{l_1^2\sigma_{E_1}^2 + \cdots + l_N^2\sigma_{E_N}^2}{(l_1 + l_2 + \cdots + l_N)^2}.$$

Pour $h \leqslant l_i$, on admettra par analogie que la même règle de pondération par les carrés des allongements peut encore s'appliquer. En remplaçant, selon (XIV,2,1), $\sigma_{E_i}^2$ par $\alpha\frac{\pi}{2}\frac{h}{l}$ et en portant dans (XIV,2,5), on obtient :

$$\sigma_N^2 = \alpha\frac{\pi}{2}h\frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_N}{(l_1 + l_2 + \cdots + l_N)^2}.$$

Introduisons la longueur tracée totale L :

$$L = l_1 + \cdots + l_N$$

et la surface reconnue S :

$$S = Lh = (l_1 + \cdots + l_N)h.$$

On obtient la formule remarquable :

$$\text{(XIV,2,6)} \qquad \sigma_N^2 = \alpha\frac{\pi}{2}\frac{S}{L^2}.$$

Toutes choses égales d'ailleurs, c'est-à-dire pour une même valeur de la dispersion absolue 3α, la longueur totale L de travaux miniers nécessaires pour obtenir une précision donnée est proportionnelle à la racine carrée de la surface minéralisée, c'est-à-dire aussi à la racine du tonnage : si les dépenses occasionnées par la reconnaissance du gisement sont rapportées à la tonne de minerai reconnu, elles sont en raison inverse de la racine carrée du tonnage. Ainsi, un gisement quatre fois plus gros qu'un autre nécessite seulement des dépenses de reconnaissance deux fois plus faibles à la tonne de minerai pour être estimé avec la même précision : les mineurs savent bien qu'un gros gisement gagne sur tous les tableaux.

C) Outre les N niveaux tracés horizontalement, on peut avoir aussi un réseau de N′ montages, ou travaux miniers exécutés le long des lignes de plus grande pente du filon, que nous supposerons implantés selon une maille régulière h'. L'ensemble de ce réseau rectangulaire de traçages et de montages permet, naturellement, une meilleure estimation que les traçages seuls. Désignons par t et t' les teneurs moyennes pondérées des traçages et des montages, calculées selon la formule (XIV,2,4), et par σ_N^2 et $\sigma_{N'}^2$ les variances d'estimation, calculées selon (XIV,2,5) ou (XIV,2,6), que l'on obtiendrait en estimant le gisement à l'aide de t seul ou de t' seul. Pour pondérer ces deux teneurs en un estimateur unique, on doit faire un krigeage, d'ailleurs très simple. Posons :

$$y = \lambda t + (1 - \lambda)t'.$$

Il faut déterminer le coefficient λ de manière que la variance d'estimation $D^2(y - z)$ de la teneur réelle z à l'aide de l'estimateur y soit minimale. Mais on a :

$$y - z = \lambda(t - z) + (1 - \lambda)(t' - z).$$

En prenant les variances, il vient :

$$D^2(y - z) = \lambda^2 D^2(t - z) + (1 - \lambda)^2 D^2(t' - z) + 2\lambda(1 - \lambda)E[(t - z)(t' - z')].$$

Les variances d'extension $D^2(t - z)$ et $D^2(t' - z)$ sont identiques à σ_N^2 et $\sigma_{N'}^2$. Quant à la covariance d'extension $E[(t - z)(t' - z)]$, on peut admettre qu'elle est négligeable : cela se vérifie par le calcul, mais il est bien intuitif que si les traçages ont, par exemple, donné une estimation t par excès de z, il n'en résulte aucune tendance préférentielle pour la teneur t' des montages à surestimer ou sous-estimer z : traçages et montages, géométriquement perpendiculaires, doivent être regardés comme des réseaux indépendants. Finalement, il reste :

$$D^2(y - z) = \lambda^2 \sigma_N^2 + (1 - \lambda)^2 \sigma_{N'}^2.$$

Cette variance est minimale pour

$$\lambda = \frac{\sigma_{N'}^2}{\sigma_N^2 + \sigma_{N'}^2} \qquad \text{(XIV,2,7)}$$

Ainsi, traçages et montages doivent être pondérés par des coefficients inversement proportionnels à leurs variances d'extension respectives. Portant cette valeur de λ dans la variance $D^2(y - z)$, on obtient l'expression de la variance d'estimation minimale, ou variance de krigeage σ_K^2 :

$$\sigma_K^2 = \frac{\sigma_N^2 \sigma_{N'}^2}{\sigma_N^2 + \sigma_{N'}^2}. \qquad \text{(XIV,2,8)}$$

Dans le cas particulier où les longueurs des traçages et des montages individuels sont toutes supérieures à leurs espacements respectifs h et h', les variances d'extension σ_N^2 et $\sigma_{N'}^2$, se calculent selon (XIV,2,6). En désignant par L' la longueur montée totale, (XIV,2,7) se réduit dans ce cas à :

$$\lambda = \frac{L^2}{L^2 + L'^2}.$$

Ainsi l'estimateur y doit avoir comme expression :

$$y = \frac{L^2 t + L'^2 t'}{L^2 + L'^2}. \qquad \text{(XIV,2,9)}$$

Autrement dit, les teneurs des traçages et des montages doivent être pondérées par les carrés des longueurs tracées et montées (et non pas par ces longueurs elles-mêmes, comme le suggèrerait une intuition un peu courte). La variance d'estimation correspondante (XIV,2,8) prend l'expression :

$$\sigma_K^2 = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{S}{L^2 + L'^2}. \qquad \text{(XIV,2,10)}$$

Elle s'obtient par la formule (XIV,2,6), à condition de composer selon la règle de Pythagore les longueurs tracées et montées totales.

D) En général, enfin, les teneurs réelles t ou t' des traçages ou des montages ne sont pas connues, mais seulement estimées à partir d'un échantillonnage fragmentaire. Supposons, par exemple, que les traçages soient estimés par N_R rainurages de longueur égale à la puissance p du filon supposée constante, implantés à maille régulière a dans les travaux miniers. La teneur moyenne des rainurages permet d'estimer t avec une variance d'estimation donnée par la même formule (XIV,2,1) ou (XIV,2,3) que ci-dessus, a et p remplaçant h et l respectivement.

On prendra garde cependant que ces formules ne s'appliquent que si la puissance p est petite vis-à-vis de h et l : si la puissance est notable [1], il est nécessaire de faire appel au schéma de wijsien à trois dimensions, et d'effectuer les montées d'ordre 1 et 2. En général, d'ailleurs, cette troisième dimension, qui est celle des puissances, n'est pas équivalente aux deux autres, et doit subir une correction d'anisotropie convenable.

[1] Les formules correspondantes, ou formules des amas, sont données dans le *Traité de Géostatistique Appliquée*, déjà cité. On y trouvera également les formules correspondant à une reconnaissance par sondages à maille rectangulaire, et à la reconnaissance périphérique des panneaux.

Désignons par σ_R^2 la variance d'estimation des rainures dans les travaux miniers, qui est de la forme :

$$\begin{cases} \sigma_R^2 = \dfrac{1}{N_R}\,\alpha\,\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{a}{p} \\ \sigma_R^2 = \dfrac{1}{N_R}\,\sigma_E^2. \end{cases}$$

selon que p est supérieur ou inférieur à la maille de rainurage. On applique alors le principe de composition des termes de tranches et des termes de ligne, et la variance d'estimation totale σ_T^2 est :

$$\sigma_T^2 = \sigma_N^2 + \sigma_R^2.$$

Le plus souvent, on doit encore ajouter un troisième terme représentant la variance des erreurs aléatoires d'analyse ou de prélèvement, et surtout prendre garde que les techniques d'analyse ou de prélèvements utilisées n'introduisent pas d'erreur systématique : une telle erreur systématique, si elle existait, se répercuterait sur l'estimation du gisement lui-même, sans que la variance d'estimation calculée ci-dessus puisse en rendre compte.

3. — Krigeage continu en schéma de wijsien isotrope à 2 dimensions.

La définition, et les équations générales du krigeage continu ont été données au paragraphe XII-7. Nous nous limiterons ici au cas d'un gisement isotrope de wijsien à deux dimensions (pratiquement, il pourra s'agir d'une formation filonienne ou stratiforme pas trop puissante). Ce gisement a été reconnu par des travaux miniers, et l'on suppose que ces travaux miniers peuvent être assimilés à une ou plusieurs courbes continues (C), par exemple, (C) sera constituée de segments de droite représentant des traçages et des montages. On admet, de plus, que l'échantillonnage a été suffisamment serré pour que l'on puisse considérer comme connue la teneur $f(s)$ en chaque point $x(s)$ des travaux miniers repéré par son abscisse curviligne s sur (C). Nous désignerons par $r(s, s') = |x(s) - x(s')|$ la distance entre deux points $x(s)$ et $x(s')$ des travaux miniers, d'abscisses curvilignes s et s'. D'après le paragraphe XII,7, le krigeage d'un panneau quelconque s'obtient par superposition de krigeages ponctuels. Limitons-nous donc au krigeage d'un point x_0 quelconque, et désignons par $R(s)$ la distance $|x_0 - x(s)|$ du point x_0 et d'un point quelconque $x(s)$ des travaux miniers.

Le problème consiste à trouver la fonction de pondération $\lambda(s)$ de somme unité telle que l'estimation :

$$Y = \int_C \lambda(s) f(s)\, ds$$

conduise à la plus petite variance d'estimation possible. Cette fonction

$\lambda(s)$ est solution du système (XII,7,10), qui s'écrit explicitement, avec la fonction de wijsiennes $3\alpha \log r$:

$$(\text{XIV},3,1) \qquad \begin{cases} \int_{(C)} \lambda(s) \log [r(s, s')] \, ds = \log \mathrm{R}(s') + \mu \\ \int_{(C)} \lambda(s) \, ds = 1. \end{cases}$$

Le paramètre μ de Lagrange, qui se détermine en principe à l'aide de la deuxième relation (XIV,3,1), ne joue en réalité qu'un rôle très subordonné. On notera surtout que la dispersion absolue 3α a disparu de ces relations, qui prennent ainsi une signification purement géométrique : La fonction $\lambda(s)$ est indépendante de 3α et ne dépend que de la géométrie des travaux miniers (C).

Dans le cas général, on ne saura pas résoudre le système d'équations intégrales (XIV,3,1). Mais, dans le cas particulier où les travaux miniers (C) constituent une courbe fermée, on tombe sur le problème classique de Dirichlet, et la solution explicite peut être formée. En effet, supposons que (C) soit *un contour fermé*, et que l'on veuille kriger un point x_0 intérieur à (C). La fonction $\log r$ est harmonique dans le plan, et y joue le même rôle que le potentiel newtonien en $\frac{1}{r}$ dans l'espace à trois dimensions. On peut établir une analogie avec la théorie classique des potentiels, et, notamment, avec l'électrostatique. Si l'on interprête la fonction de pondération $\lambda(s)$ comme une densité de charge électrique répartie sur le contour (C), on voit que le problème posé par la résolution du système (XIV,3,1) revient à répartir une charge unité sur les travaux miniers, de telle manière que le potentiel engendré par cette répartition en tout point $x(s)$ des travaux miniers (C) ne diffère que par une constante du potentiel qu'engendrerait en ce même point $x(s)$ une charge unité placée au point à kriger x_0. Autrement dit, ce potentiel doit être égal à $\log |x(s) - x_0|$ à une constante près. Mais le contour (C) est fermé, et peut être interprété comme le contour intérieur d'un conducteur creux. Imaginons réalisée cette répartition $\lambda(s)$, et introduisons une charge -1 au point à kriger x_0. Le potentiel total, engendré par la masse $+1$ répartie sur (C) et la masse -1 concentrée en x_0 prend, en un point $x(s)$ quelconque du contour, la valeur $\log |x(s) - x_0| - \log |x(s) - x_0| = 0$ à une constante près. Autrement dit (C) est une équipotentielle, et $\lambda(s)$ *peut être considérée comme la densité de charge induite sur la face interne* (C) *du conducteur creux par la masse* -1 *placée au point à kriger* x_0.

Plus généralement, si l'on désire kriger un panneau S intérieur à (C), $\lambda(s)$ sera la densité de charge induite sur (C) par une masse -1 supposée uniformément répartie dans S. Elle se détermine par sommation des densités induites par chacun des points de S, conformément au théorème de superposition des configurations de krigeage, dont l'analogue en électrostatique est le théorème bien connu de superposition des états électriques.

Un autre résultat classique de l'électrostatique va nous permettre d'énoncer un théorème important, appelé *théorème de l'écran périphérique.* A l'extérieur de (C), en effet, le potentiel total engendré par la densité de charge $\lambda(s)$ répartie sur (C) et par la masse -1 placée en x_0 reste constant, puisque l'extérieur de (C) constitue l'intérieur d'un conducteur creux. Du point de vue analytique, ce résultat est une conséquence du fait bien connu que le problème de Dirichlet n'admet pas d'autre solution partout régulière et constante sur un contour (C) qu'une constante. Autrement dit, la densité induite $\lambda(s)$ engendre, en tout point extérieur, le même potentiel, à une constante près, qu'une charge $+1$ placée au point x_0, (ou uniformément répartie dans le panneau S à kriger), et cette propriété reste vraie, à la limite, quand ce point extérieur tend vers un point $x(s)$ du contour (C).

Il en résulte que la fonction $\lambda(s)$ constitue la solution générale des équations (XII,7,6) du krigeage non seulement dans le cas examiné jusqu'ici où les valeurs de la fonction aléatoire $f(x)$ sont connues sur le contour (C), mais également dans le cas beaucoup plus général où les valeurs de $f(x)$ seraient connues à la fois sur (C) et sur un ensemble quelconque de points appartenant au domaine extérieur. Autrement dit, la connaissance de données extérieures à (C) ne modifie pas le krigeage effectué sur (C), et, en particulier, ne peut apporter aucune amélioration à l'estimation déjà obtenue. Le contour (C) arrête, en quelque sorte, l'influence de toutes les données extérieures, et ce résultat s'énonce sous la forme suivante :

Théorème de l'écran. — *En schéma de wijsien isotrope à deux dimensions, le krigeage continu effectué sur un contour fermé, relativement à un panneau intérieur quelconque, constitue un écran parfait vis-à-vis de toutes les données extérieures.*

On obtient, naturellement, un résultat analogue — mais moins intéressant dans les applications pratiques — dans le krigeage d'un panneau extérieur au contour fermé (C) : le contour (C) fait alors écran aux données intérieures. Ces résultats, liés uniquement au caractère harmonique et isotrope de la fonction $\log r$, se généralisant immédiatement, dans le cas d'une fonction intrinsèque en $\frac{1}{r^{n-2}}$ et d'un espace à n dimensions, à tout krigeage effectué sur une surface fermée (hypersurface fermée à $n-1$ dimensions).

Ce théorème de l'écran montre que le schéma intrinsèque de wijsien et isotrope possède, dans l'espace à 2 dimensions, le *caractère markovien* : *une fois connues les valeurs prises par* $f(x)$ *sur un contour fermé* (C), *il y a indépendance (ou, plus exactement, absence de corrélation), entre l'intérieur et l'extérieur de* (C). En effet, soient Z et Z′ les teneurs (pondérées de manière quelconque) de deux domaines l'un intérieur, l'autre extérieur à (C), et soit Y l'estimateur de moindre variance de Z, obtenu par les fonctions de pondération $\lambda(s)$ vérifiant les équations du krigeage.

On a, d'après ce qui précède :

$$\text{(XIV,3,2)} \qquad E[(Z - Y)(Z' - Y)] = 0.$$

L'estimateur Y du krigeage de Z s'étend indépendamment (sans corrélation) à Z et à tout échantillon extérieur Z'.

Détermination explicite de $\lambda(s)$. — Il suffit de savoir déterminer la fonction de pondération $\lambda(s)$ dans le cas d'un krigeage ponctuel, puisque le théorème de superposition permet d'en déduire le krigeage d'un panneau S quelconque. Soit un point x_0 à kriger, intérieur au contour fermé (C). On appelle, classiquement, fonction de Green $G(x, x_0)$ relative à x_0 et au contour (C) une fonction s'annulant sur le contour (C) et telle que $G(x, x_0) + \log|x - x_0|$ soit harmonique à l'intérieur du contour, y compris au point à kriger x_0. Cette fonction de Green, qui peut être construite par les méthodes de la théorie des fonctions des variables complexes, permet de résoudre le problème de Dirichlet. En particulier, elle permet de déterminer immédiatement la fonction $\lambda(s)$. En effet, le potentiel $U(x)$ engendré par la masse -1 placée en x_0 et par la densité $\lambda(s)$ induite sur (C) est constant sur le contour, puisque celui-ci est une équipotentielle, et le potentiel $U(x) + \log|x - x_0|$ engendré par la charge induite prise seule est harmonique à l'intérieur de (C), y compris en x_0. On a donc, à une constante près :

$$U(x) = G(x, x_0).$$

Le théorème classique qui relie la densité de charge $\lambda(s)$ à la dérivée du potentiel prise selon la normale intérieure du contour donne immédiatement :

$$\text{(XIV,3,3)} \qquad \lambda(s) = \frac{1}{2\pi}\frac{dU}{dn} = \frac{1}{2\pi}\frac{dG(x, x_0)}{dn}.$$

Exemple :

Krigeage continu sur deux traçages parallèles. — A titre d'exemple, prenons comme contour (C) deux droites parallèles D_1 et D_2, représentant deux traçages parallèles supposés infinis, et pre nons la distance de ces deux droites comme unité de longueur. Soit à kriger un point x_0 intérieur à l'étage, situé à la distance $h < 1$ de D_1 et $(1 - h)$ de D_2. Prenons $x_0 = 0$ comme origine, et deux axes ox et oy de coordonnées rectangulaires ox étant parallèle à D_1 et D_2. La fonction harmonique

$$\text{(XIV,3,4)} \quad G(x, y) = -\frac{1}{2}\log\frac{e^{2\pi x} - 2e^{\pi x}\cos\pi y + 1}{e^{2\pi x} - 2e^{\pi x}\cos\pi(y - 2h) + 1}$$

s'annule pour $y = h$ et $y = h - 1$, c'est-à-dire sur D_1 et D_2 et

$$G + \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$$

reste régulière en $x = y = 0$. $G(x, y)$ est donc la fonction de Green

relative au point 0 et aux deux droites D et D'. En appliquant (XIV,3,3), on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_1(x) = \left[-\dfrac{\partial}{\partial y} G(x, y) \right]_{y=h} \\ \lambda_2(x) = \left[\dfrac{\partial}{\partial y} G(x, y) \right]_{y=1-h} \end{cases}$$

$\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ représentent les densités induites sur D_1 et D_2 respectivement, c'est-à-dire la fonction de pondération $\lambda(s)$. Compte tenu de (XIV,3,4), on trouve :

$$\text{(XIV,3,5)} \quad \begin{cases} \lambda_1(x) = \dfrac{e^{\pi x} \sin \pi h}{e^{2\pi x} - 2e^{\pi x} \cos \pi h + 1} = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} e^{-p\pi|x|} \sin p \pi h, \\ \lambda_2(x) = \dfrac{e^{\pi x} \sin \pi h}{e^{2\pi x} + 2e^{\pi x} \cos \pi h + 1} = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} e^{-p\pi|x|} \sin p \pi h. \end{cases}$$

Le poids porté par un segment (x_1, x_2) du traçage D_1 s'en déduit par intégration :

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2) = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \lambda_1(x)\, dx = \Lambda_1(x_2) - \Lambda_1(x_1), \\ \Lambda_1(x) = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{Arc\,tg} \left[\dfrac{e^{\pi|x|} - \cos \pi h}{\sin \pi h} \right]. \end{cases}$$

On a sur D_2 la formule analogue, obtenue en remplaçant h par $1 - h$. Les poids totaux, portés par les droites infinies D_1 et D_2 s'en déduisent immédiatement :

$$\text{(XIV,3,6)} \quad \begin{cases} P_1(-\infty, +\infty) = 1 - h \\ P_2(-\infty, +\infty) = h. \end{cases}$$

Ainsi, le poids total porté par chaque traçage est en raison inverse de la distance du point à krieger. Le théorème de superposition permet de déduire de (XIV,3,6) le *théorème dit du centre de gravité*: « *Dans le krigeage d'un panneau* S *quelconque, appartenant à l'étage compris entre deux traçages infinis parallèles, le poids total porté par chacun des traçages est inversement proportionnel à la distance du centre de gravité du panneau* S ». Ce résultat peut être étendu, d'ailleurs, à des fonctions intrinsèques $\gamma(r)$ quelconques, et n'est pas particulier au schéma de Wijsien.

Par superposition de formules du type (XIV,3,5), on obtient facilement le krigeage d'un panneau S quelconque, et la méthode dite des images permet d'en déduire le krigeage d'un panneau S sur deux traçages et un montage, ou sur deux traçages et deux montages (périphérie d'un panneau rectangulaire) etc... (1).

(1) Le lecteur pourra se reporter au *Traité de Géostatistique Appliquée* (Tome II), déjà cité. Les résultats sont exprimés par des formules explicites, mais, dans les applications pratiques, il est plus commode de décomposer S en carrés élémentaires, que l'on krige à l'aide de grilles numériques et de superposer les résultats. Les opérations se font très facilement par voie graphique. Dans ce même Tome II, de nombreuses figures de krigeage discontinu ont été également tabulées et présentées sous forme d'abaques, notamment un grand nombre de figures concernant les sondages à maille carrée.

ANNEXE A

RAPPEL SUR LES DISTRIBUTIONS

SOMMAIRE

Cet exposé sommaire de la théorie des distributions suit très étroitement, mais sans aucune rigueur, et en supprimant, le plus souvent, les démonstrations, les ouvrages de L. SCHWARTZ [1], *avec quelques emprunts aussi à* I. M. GUELFAND [2]. *Il est destiné aux lecteurs, naturalistes ou techniciens, qui ne connaîtraient pas cette théorie, et voudraient cependant comprendre les chapitres* III *et* X *de cet ouvrage. Ainsi qu'il a été dit, ces deux chapitres sont indépendants du reste du livre, et peuvent être omis, ainsi que cette Annexe A, par les lecteurs qui ne voudraient pas connaître les Distributions.*

Nous insistons cependant, au delà du cadre modeste de cet ouvrage, sur l'intérêt que présente cette théorie pour un naturaliste ou un technicien. Les phénomènes de la nature, en effet, bien qu'ils existent indépendamment de l'homme, ne nous sont jamais connus qu'à partir des résultats d'expérience, ou d'opérations technologiques. De même, une distribution n'est jamais connue « en soi », mais seulement par son action sur certaines fonctions de base φ, *qui représentent très bien ces expériences ou ces opérations technologiques. Il est souvent commode, et toujours instructif, par conséquent, de se représenter un phénomène naturel comme une distribution plutôt que sous la forme d'une fonction ordinaire.*

Après avoir défini les mesures (A, 1), *les distributions* (A, 2) *et les opérations élémentaires, puis la dérivation* (A, 3) *et les passages à la limite* (A, 4), *on étudie quelques exemples utiles* (A, 5) *et l'intégration d'ordre non entier* (A, 7). *L'accent est mis sur la convolution* (A, 6), *les transformations de Fourier-Hankel* (A, 8), *et les distributions de type positif* (A, 9).

Faute de place, nous n'avons pu aborder les problèmes relatifs aux équations de convolution (équations intégro-différentielles et aux dérivées partielles) pour lesquels l'apport des distributions est fondamental, mais qui ne sont guère abordés dans cet ouvrage.

Le lecteur qui ne connaîtrait pas les distributions et ne voudrait pas s'y intéresser pourra cependant se référer aux sous paragraphes 8-1 (transformations de Fourier-Hankel pour les fonctions) et 9-1 (fonctions de type positif), dont les résultats sont utilisés dans tout l'ouvrage.

[1] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Paris, Hermann, 1951 et *Méthodes Mathématiques pour les Sciences physiques*, Paris, Hermann 1961.

[2] I. M. GUELFAND et G. E. CHILOV, *Les distributions*, trad. français, Paris, Dunod, 1962.

1. — Mesures.

C'est souvent par une simplification abusive que l'on décrit certains phénomènes par des fonctions de point. Par exemple, dans un milieu gazeux, la notion de densité de matière $\mu(x)$ en un point x (de coordonnées x_1, x_2, x_3) perd toute signification précise dès que l'on descend à l'échelle des particules élémentaires. Par contre, l'intégrale

$$\text{(A,1,1)} \qquad Q = \int_V \mu(x)\, dx$$

représentant la quantité de matière contenue dans un volume V quelconque a toujours un sens, puisque chaque volume V contient effectivement une quantité définie de matière. Plus généralement, si une masse ponctuelle placée au point x exerce un certain effet physique (un potentiel par exemple) caractérisé par une fonction $\varphi(x)$, l'effet exercé par la quantité de matière contenue dans V, symbolisé par l'intégrale

$$\text{(A,1,2)} \qquad \int_V \mu(x)\, \varphi(x)\, dx$$

est une réalité, de sorte que l'intégrale 1-2 doit avoir un sens, même si la fonction $\mu(x)$ n'est pas réellement définissable en tant que fonction de point. En fait, il est clair que, si nous sommes capables de déterminer la valeur numérique de (1,2) pour toutes les fonctions $\varphi(x)$ auxquelles nous sommes susceptibles de nous intéresser, le fait que $\mu(x)$ ne soit peut-être pas définissable en tant que fonction n'aura plus beaucoup d'importance. En réalité, le procédé même qui nous permet d'attribuer un sens à (1,1) ou (1,2) définit un être mathématique nouveau, généralisant la notion de fonction de point $\mu(x)$, et qui porte le nom de *mesure*.

Précisons cette définition. Tout d'abord les fonctions φ ne peuvent pas être tout à fait quelconques. Limitons-nous, en premier lieu, à l'ensemble (ou espace) (C) des fonctions φ possédant les deux propriétés suivantes :

— elles sont continues;

— elles ne prennent de valeurs différentes de zéro que dans un domaine borné (à cela près quelconque).

Nous dirons que nous avons défini une *fonctionnelle* L sur l'espace (C) des fonctions φ, si à toute fonction φ appartenant à (C) nous sommes capables de faire correspondre un nombre, que nous noterons $L(\varphi)$. Lorsque $L(\varphi)$ est réel pour toute fonction réelle φ de (C), la fonctionnelle L est dite réelle.

La fonctionnelle L est dite *linéaire* si, pour toutes fonctions φ_1, φ_2 de (C) et pour tout nombre complexe λ on a :

$$\text{(A,1,3)} \qquad \begin{cases} L(\varphi_1 + \varphi_2) = L(\varphi_1) + L(\varphi_2) \\ L(\lambda\varphi) \qquad\quad = \lambda L(\varphi). \end{cases}$$

Enfin, elle sera dite *continue*, si, pour toute suite de fonction φ_i, conti-

nues et nulles en dehors d'un même domaine borné, convergeant uniformément vers une fonction φ de (C), les $L(\varphi_i)$ convergent vers $L(\varphi)$.

Une mesure μ est, par définition, *une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace* (C). Au lieu de $\mu(\varphi)$, on écrit souvent (intégrale de Stieltjes)

$$\int \varphi \, d\mu.$$

On démontre que les mesures n'agissent pas seulement sur l'espace (C) mais sur l'ensemble plus vaste des fonctions dites boréliennes [1] nulles en dehors d'un domaine borné. Le volume V, qui intervient dans l'expression (1,1), peut être défini à l'aide d'une fonction $k(x)$, dite caractéristique [2], égale à $+1$ lorsque le point x appartient à V, et à 0 dans le cas contraire. Une telle fonction $k(x)$ est borélienne, non seulement pour les volumes géométriques usuels, mais pour des ensembles de points beaucoup plus généraux (ensembles boréliens). L'« intégrale » (1,1) doit être remplacée par l'écriture plus rigoureuse suivante

$$Q = \mu(k) = \int k(x) \, d\mu.$$

Et, de la même manière, (1,2) est remplacée par l'expression

$$\mu(k\varphi) = \int k(x)\varphi(x) \, d\mu$$

qui a un sens précis pour toute fonction φ continue, ou même borélienne.

Cette notion de mesure est une généralisation naturelle de la notion de fonction, en ce sens qu'à toute fonction $f(x)$, pourvu qu'elle soit sommable sur tout ensemble borné, correspond une mesure f bien définie par :

$$(A,1,4) \qquad f(\varphi) = \int f(x)\varphi(x) \, dx.$$

On notera cependant qu'à deux fonctions égales presque partout correspond une seule et même mesure, de sorte que la donnée de la fonctionnelle (1,4) ne définit une fonction f qu'à un ensemble de mesure nulle près.

Support. — On appelle support d'une fonction continue φ le plus petit ensemble fermé contenant tous les points où $\varphi(x)$ est différent de 0 : La fonction φ est identiquement nulle dans le complémentaire de son support.

De même on appelle support [3] d'une mesure μ le plus petit ensemble fermé tel que $\mu(\varphi)$ soit nul pour toute fonction φ dont le support est

[1] « On appelle tribu borélienne le plus petit ensemble de fonctions qui contienne toutes, les fonctions continues et ne puisse contenir une suite convergente de fonctions sans contenir aussi leur limite ». (L. Schwartz).

[2] C'est la terminologie ensembliste. Dans cet ouvrage, nous désignons aussi la fonction $k(x)$ comme la variable régionalisée géométrique associée au volume (ou à l'ensemble) V.

[3] Dans le présent ouvrage, le terme de support est réservé aux fonctions φ (fonctions de prélèvement). Pour les mesures et les distributions on parle plutôt de champ (champ géométrique d'une régionalisation).

contenu dans son complémentaire : Autrement dit $\mu(\varphi)$ est nul lorsque les supports de μ et de φ ne se coupent pas.

L'espace (C) est l'ensemble des fonctions continues à support borné. Si une mesure est à support borné, elle agit non seulement sur les fonctions φ de (C) mais sur toutes les fonctions continues (à support quelconque), en particulier sur la fonction φ constante et égale à l'unité dans tout l'espace. Dans ce cas, l'intégration $\int d\mu$ étendue à tout l'espace existe donc, et la mesure μ est dite *sommable.*

Mesure de Dirac. — On appelle mesure de Dirac δ la mesure définie par

(A,1,5) $$\delta(\varphi) = \varphi(0).$$

Le support de cette mesure se réduit à un seul point, qui est l'origine 0 des coordonnées. C'est une mesure sommable, de somme égale à l'unité. Dans l'optique intuitive de l'équation (1,1), elle correspond à une masse ponctuelle unité placée en 0. La « densité » est partout nulle, sauf à l'origine, où elle est infinie. La quantité de matière $\int_V \delta(x)\,dx$ est égale à 1 ou à 0 selon que V contient, ou non, l'origine des coordonnées. On écrit souvent (1,5) sous forme symbolique, comme si δ était une fonction :

$$\int \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

De même, on désigne par δ_y la mesure définie par

$$\delta_y(\varphi) = \varphi(y).$$

Elle correspond à une masse ponctuelle unité placée au point y, et on écrit symboliquement $\delta(x-y)$ au lieu de δ_y, et :

$$\int \delta(x-y)\varphi(x)\,dx = \varphi(y).$$

Mesures positives. — Une mesure μ est dite positive si $\mu(\varphi)$ est positif ou nul pour toute fonction φ non négative. Toute mesure réelle est différence de deux mesures positives.

Les fonctions de répartitions du calcul des probabilités sont en réalité des mesures positives sommables, de somme unité.

2. — Distributions.

2.-*1.* — *Généralités.* — Nous avons défini les mesures comme fonctionnelles linéaires continues sur l'espace (C) des fonctions continues à support borné. On désigne par (C′) l'espace des mesures, et on dit que (C′) est le dual de (C). La même définition peut être appliquée à des espaces de fonctions autres que (C). Ainsi, si l'on impose aux fonctions de bases φ des conditions plus sévères que d'être continues et à support borné, par

exemple des conditions de dérivabilité, on voit que l'on peut introduire des êtres mathématiques nouveaux qui généraliseront les mesures de la même manière que les mesures généralisaient les fonctions localement sommables. Ces êtres sont les distributions.

Il faut bien voir qu'une distribution T n'a pas d'existence en soi, mais seulement pour un ensemble défini (ou espace) de fonctions de bases φ. On dit, en langage mathématique, que T est définie sur cet espace de fonctions φ. Une fonctionnelle T n'est pas autre chose qu'un procédé (quel qu'il soit) qui permet d'associer une valeur numérique $T(\varphi)$ à toute fonction de base φ. De la même manière, d'ailleurs, une fonction usuelle f n'est pas autre chose qu'un procédé permettant d'associer une valeur numérique $f(x)$ à tout point x de l'espace usuel. Si l'on interprète φ comme un point de l'espace des fonctions de bases, la fonctionnelle $T(\varphi)$ apparaît comme l'exacte généralisation de la fonction $f(x)$.

L'ensemble (ou espace) des distributions T définies sur un espace de fonctions de base φ s'appelle *le dual* de l'espace des fonctions de base. Il faut bien voir que plus l'espace des fonctions de bases est compréhensif, plus l'espace dual des distributions est restreint. Il existera relativement peu de fonctionnelles capables d'agir sur des fonctions à peu près quelconques. Par exemple, seules les mesures agiront sur les fonctions continues (ou, plus généralement boréliennes). Au fur et à mesure que l'on impose des conditions plus sévères aux fonctions de base φ (par exemple, d'être dérivables une fois, deux fois... ou indéfiniment dérivables) on voit surgir, à l'horizon des distributions, des êtres nouveaux, de plus en plus généraux.

La relation d'inclusion est la suivante : si un espace $\mathcal{E}_1$ de fonctions est un sous espace de $\mathcal{E}$, l'espace $\mathcal{E}'$ des distributions définies sur $\mathcal{E}$ est un sous-espace de l'espace des distributions $\mathcal{E}'_1$ définies sur $\mathcal{E}_1$: Autrement dit, si toute fonction de $\mathcal{E}_1$ fait partie de $\mathcal{E}$, toute distribution de $\mathcal{E}'$ fait partie de $\mathcal{E}'_1$.

Ainsi toute fonction indéfiniment dérivable (espace $\mathcal{D}$) est une fonction continue (espace C). Il en résulte que toute mesure (espace C') est une distribution de l'espace $(\mathcal{D}')$ que nous allons définir, tandis qu'en général une distribution T quelconque de $\mathcal{D}'$ ne sera pas une mesure : $T(\varphi)$ n'existera pas pour une fonction φ continue quelconque, mais seulement pour une fonction φ indéfiniment dérivable (de $\mathcal{D}$).

D'une manière générale, étant donné un espace $(\mathcal{E})$ de fonctions, on définit l'espace de distributions $(\mathcal{E}')$, dual de $(\mathcal{E})$ comme l'espace des *fonctionnelles linéaires continues* sur $(\mathcal{E})$. Autrement-dit, T est une distribution de $(\mathcal{E}')$ si :

1. — A toute fonction φ de $\mathcal{E}$ on sait faire correspondre un nombre $T(\varphi)$.

2. — On a les relations de linéarité :

$$\text{(A,2,1)} \qquad \begin{cases} T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2) \\ T(\lambda\varphi) = \lambda T(\varphi). \end{cases}$$

3. — Si une suite de fonctions φ_i de $(\mathcal{E})$ converge vers une fonction φ de $(\mathcal{E})$ les $T(\varphi_i)$ convergent vers $T(\varphi)$.

Cette définition ne prend un sens précis que si l'on définit exactement ce que l'on entend par suite des fonctions φ_i convergeant vers une fonction φ, c'est-à-dire si l'on munit l'espace $(\mathcal{E})$ d'une *convergence.*

Notation symbolique. — On écrit souvent, de manière purement symbolique, mais parlante :

$$\int T(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{au lieu de} \quad T(\varphi).$$

2.-2. — *Les espaces* $(\mathcal{D})$ *et* $(\mathcal{D}')$. — On dit qu'une fonction φ appartient à l'espace $(\mathcal{D})$ si elle est *indéfiniment dérivable et à support borné.* Les fonctions usuelles ne répondent pas, en général, à cette définition : on exige, en effet, que φ soit identiquement nulle en dehors de son support borné, et en même temps qu'elle admette des dérivées de tous les ordres en tout point, y compris à la frontière de son support.

Comme exemple simple de fonction de $(\mathcal{D})$, citons la fonction $s(x)$ définie par L. Schwartz de la manière suivante :

$$\text{(A,2,2)} \qquad \begin{cases} s(x) = 0 & \text{pour } r \geqslant 1 \\ s(x) = \exp\left[-\dfrac{1}{1-r^2}\right] & \text{pour } r < 1 \\ (r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}). \end{cases}$$

A partir de cette fonction $s(x)$, il est possible de construire des fonctions de $(\mathcal{D})$ aussi peu différentes que l'on veut de toute fonction $f(x)$ continue à support borné. Le procédé consiste à régulariser f par la fonction $s\left(\dfrac{x}{a}\right)$, a étant une constante arbitrairement petite : Posant

$$C = \int s\left(\frac{x}{a}\right) dx = a^n \int s(x)\,dx$$

le produit de convolution

$$\text{(A,2,3)} \qquad \varphi(x) = \frac{1}{C}\int f(x-\xi)s\left(\frac{\xi}{a}\right) d\xi$$

définit une fonction φ de $(\mathcal{D})$ « approchant » f d'autant mieux que a est plus petit.

Pour définir l'espace $(\mathcal{D}')$ des distributions, nous devons munir $(\mathcal{D})$ d'une convergence. Nous dirons qu'une suite φ_i de fonction de $(\mathcal{D})$ converge vers une fonction φ de $(\mathcal{D})$ si :

1. — Les supports des φ_i restent tous contenus dans un même domaine borné,

2. — Les φ_i et leurs dérivées convergent uniformément vers φ et ses dérivées.

Une telle convergence est sévère, puisqu'elle n'intéresse pas seulement les fonctions φ_i mais aussi chacune de leurs dérivées.

Les fonctionnelles linéaires continues sur $(\mathcal{D})$ au sens de cette convergence constituent l'espace de distributions $(\mathcal{D}')$. C' est l'espace de distributions le plus général possible. Lorsque l'on parle de distributions, sans préciser, il s'agit de distributions de $(\mathcal{D}')$.

Le *support* d'une distribution se définit exactement comme celui d'une mesure. Un sous espace de $(\mathcal{D}')$ souvent utilisé est *l'espace* $(\mathcal{E}')$ *des distributions à support borné.* On montre que $(\mathcal{E}')$ est le dual de *l'espace* $(\mathcal{E})$ *des fonctions indéfiniment dérivables à support quelconque* (borné ou non) : les distributions à support borné sont fonctionnelles linéaires continues sur $(\mathcal{E})$.

2.-*3.* — *Addition et multiplication des distributions.* — L'addition de deux distributions T_1 et T_2, la multiplication par un scalaire λ se définissent sans difficulté par les relations

$$\text{(A,2,4)} \qquad \begin{cases} (T_1 + T_2)(\varphi) = T_1(\varphi) + T_2(\varphi) \\ (\lambda T)(\varphi) = \lambda[T(\varphi)] \end{cases}$$

qui font de $(\mathcal{D}')$ un espace vectoriel.

La multiplication de deux distributions n'est pas possible dans le cas général, mais une distribution T peut être multipliée par une fonction $f(x)$ vérifiant des conditions de régularité suffisante. La distribution fT, symboliquement, agirait sur une fonction de base φ de la manière suivante :

$$f\mathrm{T}(\varphi) = \int f(x)\mathrm{T}(x)\varphi(x)\,dx.$$

Cette écriture symbolique a un sens si le produit $f(x)\varphi(x)$ appartient au même espace que la fonction de base φ. Par exemple, si T appartient à $(\mathcal{D}')$, il faut que $f(x)\,\varphi(x)$ appartienne à $(\mathcal{D})$ quelle que soit la fonction φ de $(\mathcal{D})$: il en est ainsi si f est indéfiniment dérivable (à support quelconque), c'est-à-dire appartient à $(\mathcal{E})$. Lorsque cette condition est réalisée, le produit fT est défini par la relation

$$\text{(A,2,5)} \qquad (f\mathrm{T})(\varphi) = \mathrm{T}(f\varphi).$$

2.-*4.* — *Translatée et Transposée d'une distribution.* — La *translatée* $\tau_h f$ par un vecteur h d'une fonction ordinaire $f(x)$ est la fonction $f(x - h)$

$$\tau_h f = f(x - h).$$

Si f est localement sommable, donc définit une distribution f, sa translatée $f(x - h)$ définit également une distribution :

$$\tau_h f(\varphi) = \int f(x - h)\varphi(x)\,dx = \int f(x)\varphi(x + h)\,dx.$$

En changeant x en $x + h$, on voit que $f(x - h)$ agit sur φ comme $f(x)$ sur $\varphi(x + h)$. Cette définition est transposable aux distributions : La translatée $\tau_h T$ est la distribution qui agit sur $\varphi(x)$ comme T sur $\varphi(x + h)$, soit

$$\tau_h T(\varphi) = T(\tau_{-h}\varphi). \qquad \text{(A,2,6)}$$

En notation symbolique, on écrira

$$\tau_h T = T(x - h).$$

De même, la *transposée* $\check{f}$ d'une fonction $f(x)$ est la fonction $f(-x)$. En tant que distribution, elle agit sur $\varphi(x)$ comme $f(x)$ sur $\varphi(-x)$, ca on a :

$$\int f(-x)\varphi(x)\,dx = \int f(x)\varphi(-x)\,dx.$$

La transposée $\check{T}$ d'une distribution quelconque se définira donc par :

$$\check{T}(\varphi) = T(\check{\varphi}).$$

et on notera, symboliquement

$$\check{T}(x) = T(-x). \qquad \text{(A,2,7)}$$

2.-*5. — Pseudo-fonctions, et régularisation des intégrales divergentes.* — Parmi les fonctions $f(x)$ usuelles, seules les fonctions *localement sommables* (sommables sur tout ensemble borné) peuvent être identifiées à des distributions :

$$f(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Des fonctions aussi usuelles que $\frac{1}{x}$, cependant ne sont pas sommables au voisinage de certains points singuliers $\left(x = 0, \text{ pour } \frac{1}{x}\right)$, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\frac{dx}{x} \qquad \text{(A,2,8)}$$

étant divergente dans l'espace à 1 dimension. Cependant, les expressions

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{-a} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{-a}^{+a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,dx + \int_a^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

ont un sens pour toute fonction φ de $(\mathcal{D})$: elles définissent, pour ces fonctions φ, une fonctionnelle linéaire et continue, donc une distribution

particulière, appelée v.p. $\frac{1}{x}$ (valeur principale) ou P.f. $\frac{1}{x}$ (pseudo-fonction). Cette pseudo-fonction — qui est une distribution — ne peut absolument pas être identifiée à la fonction $\frac{1}{x}$. Mais, agissant sur une fonction $\varphi(x)$ telle que

$$\varphi(0) = 0$$

pour laquelle l'intégrale (2,8) a un sens, elle donne la même valeur numérique que cette intégrale, de sorte qu'on a, dans ce cas

$$\text{v.p.}\frac{1}{x}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

On peut dire, si l'on veut, que cette pseudo-fonction coïncide avec la fonction $\frac{1}{x}$ en dehors de l'origine.

Plus généralement si une fonction $f(x)$ présente à l'origine une singularité telle que $x^m f(x)$ soit localement sommable pour un entier m convenable, sans que f le soit elle-même, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{-1} f\varphi\, dx + \int_{-1}^{1} f(x)\left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \cdots - \frac{x^m}{m!}\varphi^{(m)}(0)\right] dx + \int_{1}^{\infty} f\varphi\, dx$$

est convergente pour toute fonction φ de $(\mathfrak{D})$. Elle définit une fonctionnelle linéaire et continue, donc une distribution, qui est la pseudo-fonction $f(x)$: Cette pseudo-fonction — qui est une distribution — ne coïncide avec la fonction $f(x)$ qu'en dehors de l'origine.

Il existe un autre procédé de définition des pseudo-fonctions, et de régularisation des intégrales divergentes, fondé sur la méthode des prolongements analytiques. Par exemple, à n dimensions, la fonction r^λ, avec

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

définit une distribution pourvu que la partie réelle de λ soit supérieure à $-n$

$$\mathrm{R}_e(\lambda) > -n$$

car l'intégrale

$$r^\lambda(\varphi) = \int r^\lambda \varphi(x)\, dx$$

est convergente. Considérée comme fonction de la variable complexe λ, l'expression $r^\lambda(\varphi)$ est une fonction analytique, et peut, à ce titre, être prolongée dans le plan complexe. On montre que ce prolongement analytique existe pour toutes les valeurs de λ, sauf les valeurs entières négatives $-n, -n-2, -n-4 \ldots$, qui sont des pôles. Ce prolongement définit une fonctionnelle linéaire, dont on montre qu'elle est continue, c'est-à-dire une distribution (pseudo-fonction) r^λ.

Ces pseudo-fonctions sont très importantes dans les applications, où elles permettent souvent d'éviter de délicates discussions de convergence.

3. — Dérivations des distributions.

3.-1. — ***Définition.*** — Dans l'espace à une seule dimension, si une fonction $f(x)$ continue possède une dérivée continue $f'(x)$, cette dérivée peut être définie, en tant que distribution, par la formule

$$f'(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx.$$

Faisant une intégration par parties, et tenant compte du fait que $\varphi(x)$, qui appartient à $(\mathcal{D})$, s'annule à l'infini, on obtient :

$$f'(\varphi) = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Comme φ' appartient aussi à $(\mathcal{D})$, on voit que la dérivée f' peut être définie comme la distribution qui agit sur φ, au signe près, de la même manière que f agit sur φ', soit :

$$f'(\varphi) = -f(\varphi').$$

Sous cette forme, la définition de la dérivée se généralise à une distribution quelconque. Par définition, la dérivée d'une distribution T est la fonctionnelle T′ telle que l'on ait :

$$\text{(A,3,1)} \qquad T'(\varphi) = -T(\varphi').$$

Cette fonctionnelle est linéaire. Elle est aussi continue, car si une suite φ_i de fonctions de base tend vers une fonction de base φ, les dérivées φ_i' tendent vers φ' (par suite de la définition même de la convergence dans $\mathcal{D}$), et, comme T est continue, (par définition des distributions) $T(\varphi_i')$ tend vers $T(\varphi')$. La fonctionnelle T′ est donc elle même continue : c'est donc une distribution.

Ainsi, *toute distribution* T *est indéfiniment dérivable, et ses dérivées successives sont des distributions.*

La définition (3,1) se généralise sans difficulté à l'espace à n dimensions, et aux dérivées partielles d'ordre quelconque $m = m_1 + m_2 + \cdots m_n$:

$$\text{(A,3,2)} \qquad \frac{\partial^m T}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}(\varphi) = (-1)^m T\left(\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}\right).$$

Par exemple, le laplacien

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial_{x^2 n}}$$

d'une distribution T est la distribution ΔT définie par :

$$\text{(A,3,3)} \qquad \Delta T(\varphi) = T(\Delta\varphi).$$

Lorsque le produit $\alpha(x)\mathrm{T}$ d'une distribution T par une fonction $\alpha(x)$, qui est alors obligatoirement dérivable au sens usuel, est définie (parag. 2,3), la règle habituelle de dérivation des produits s'applique

$$\frac{\partial(\alpha \mathrm{T})}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \mathrm{T}. \tag{A,3,4}$$

3.-*2.* — *Dérivées des mesures de Dirac.* — Comme toute distribution, la mesure de Dirac δ est indéfiniment dérivable, et ses dérivées successives sont des distributions. A une seule dimension, la dérivée $\delta^m(x)$ est la distribution définie par :

$$\delta^m(\varphi) = (-1)^m \varphi^{(m)}(0) \tag{A,3,5}$$

soit en écriture symbolique :

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \delta^{(m)}(x)\varphi(x)\, dx = (-1)^m \varphi^{(m)}(0).$$

De même, à n dimensions et en écriture symbolique :

$$\int \frac{\partial^m \delta(x-a)}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} \varphi(x)\, dx = (-1)^m \frac{\partial^m \varphi(a)}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}. \tag{A,3,6}$$

Ces distributions sont d'un usage constant en Mécanique Quantique, calcul dit symbolique des électriciens, etc... Leur support se réduit à un point. On démontre, réciproquement, que *toute distribution à support ponctuel est combinaison linéaire de la mesure de Dirac et de ses dérivées successives.*

3.-*3.* — *Dérivées des fonctions localement sommables.* — Considérée en tant que distribution, *toute fonction localement sommable est indéfiniment dérivable au sens des distributions, même si elle n'admet pas de dérivées au sens usuel.* Mais il faut bien voir que ses dérivées usuelles, si elles existent, ne coincident pas nécessairement avec ses dérivées au sens des distributions.

Considérons, par exemple, la fonction d'Heaviside $\mathrm{Y}(x)$, dans l'espace à une dimension, définie par

$$\begin{cases} \mathrm{Y}(x) = 0 & \text{pour } x < 0 \\ \mathrm{Y}(x) = 1 & \text{pour } x > 0. \end{cases} \tag{A,3,7}$$

La dérivée au sens usuel $\mathrm{Y}'(x)$ est partout nulle, sauf à l'origine où elle n'est pas définie. Au sens des distributions, on trouve

$$\mathrm{Y}'(\varphi) = -\mathrm{Y}(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Y}(x)\, \varphi'(x)\, dx = \varphi(0).$$

De sorte qu'au sens des distributions la dérivée Y' est la mesure de Dirac :

$$\mathrm{Y}' = \delta. \tag{A,3,8}$$

De même, toujours à 1 dimension, soit une fonction $f(x)$ dérivable et continue, ainsi que ses dérivées, jusqu'à un certain ordre, en tout point sauf à l'origine $x = 0$, mais telle que ces dérivées admettent en $x = 0$ une limite à droite et une limite à gauche, $f^{(m)}(+0)$ et $f^{(m)}(-0)$. En désignant par S_m le saut de la dérivée d'ordre m

$$S_m = \{f^{(m)}(+0)\} - \{f^{(m)}(-0)\}$$

et en notant $\{f^{(m)}(x)\}$ les dérivées successives au sens usuel (qui sont des fonctions continues, sauf en $x = 0$), les dérivées $f^{(m)}$ au sens des distributions sont données par :

$$\begin{cases} f' = \{f'(x)\} + S_0\delta \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(m)} = \{f^{(m)}\} + S_0\delta^{(m-1)} + S_1\delta^{(m-2)} + \dots + S_{m-1}\delta. \end{cases}$$

Dans l'espace à n dimensions, on a des résultats analogues, qui permettent, entre autres, de retrouver très naturellement la formule de Green. Mentionnons seulement ici que le laplacien de la fonction $1/r^{n-2}$ (ou $\log r$ si $n = 2$), nul au sens usuel, sauf à l'origine où il n'est pas défini, est donné, au sens des distributions, par :

$$\text{(A,3,9)} \qquad \Delta \frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta$$

et, pour $n = 2$ (cas du plan)

$$\text{(A,3,10)} \qquad \Delta \log r = 2\pi\delta.$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta$. De telles relations sont utiles dans la théorie des potentiels harmoniques.

4. — Passage à la limite.

Par définition, on dit qu'une suite de distributions T_i converge vers une distribution T si, pour toute fonction de base φ de $(\mathcal{D})$, les nombres $T_i(\varphi)$ convergent (au sens usuel) vers le nombre $T(\varphi)$. De même, on dira que la série $\sum_{i=1}^{\infty} T_i$ de distributions converge et a pour somme la distribution T si les sommes partielles $\sum_{i=1}^{m} T_i$ convergent vers T, au sens qui vient d'être défini, lorsque m tend vers l'infini.

On démontre alors le résultat suivant : si une suite de distributions T_i est telle que, pour toute fonction φ de (D), la suite numérique $T_i(\varphi)$ ait une limite au sens usuel, la suite T_i converge vers une distribution T.

De même, si pour toute fonction φ, la série $\sum_i T_i(\varphi)$ est convergente, la série $\sum_i T_i$ converge vers une distribution T. (Il est clair que la limite de la suite ou de la série des $T_i(\varphi)$ définit une fonctionnelle linéaire sur $(\mathcal{D})$. On montre, ce qui est beaucoup moins évident, que cette fonctionnelle est continue).

On établit également la continuité de la dérivation : Si une suite (ou une série) de distributions T_i converge vers une distribution T, la suite (ou la série) dérivée T_i' converge vers la dérivée T' de T. (En effet, pour une suite T_i par exemple, $T_i'(\varphi) = -T_i(\varphi')$ converge vers

$$-T(\varphi') = T'(\varphi) :$$

cela résulte de la définition de la dérivation, et du fait que si φ appartient à $(\mathcal{D})$ il en est de même de φ').

Ainsi, *on a toujours le droit de dériver terme à terme une série convergente.*

Et la série obtenue est toujours convergente : la théorie des distributions parvient ainsi à donner un sens à de larges catégories de séries, qui divergent au sens de l'analyse ordinaire. Par exemple, pour que la série trigonométrique

$$\text{(A,4,1)} \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikx}$$

soit convergente, il suffit que les coefficients a_k soient majorés, en module, par une expression de la forme Ak^m (A constante, m entier). En effet, les séries

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_k}{k^{m+2}} e^{ikx} \qquad \text{et} \qquad \sum_1^{\infty} (-1)^{m+2} \frac{a_{-k}}{k^{m+2}} e^{-ikx}$$

convergent uniformément, de sorte que leur somme est une fonction continue. En dérivant $m+2$ fois, terme à terme, on obtient des séries convergentes de distributions, dont la somme ne diffère de (4,1) que par une constante.

Par exemple, on démontre la relation

$$\text{(A,4,2)} \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi kx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x-k).$$

Une telle série représente des masses unités disposées en tous les points d'abscisses entières. Appliquant cette relation à une fonction de base φ dont la transformée de Fourier ψ est donnée par

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-2\pi iux}\, dx$$

on obtient la *formule sommatoire de Poisson* :

$$\text{(A,4,3)} \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(n).$$

5. — Les distributions Y_λ, x^λ et r^λ.

La fonction r^λ, dans l'espace à n dimensions, est localement sommable, pourvu que la partie réelle de λ soit plus grande que $-n$. Pour

$$R_e(\lambda) \leqslant -n,$$

les méthodes du paragraphe 2,5 permettent de définir r^λ comme distribution (pseudo-fonction). On peut introduire rapidement ces pseudo-fonctions par dérivations successives.

5.-1. — ***Distributions.*** Y_λ — Dans l'espace à une dimension, considérons les fonctions $Y_\lambda(x)$ définies comme suit :

$$\text{(A,5,1)} \qquad \begin{cases} Y_\lambda(x) = \dfrac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} & \text{pour } x \geqslant 0 \\ Y_\lambda(x) = 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

Si $R_e(\lambda)$ est positif, Y_λ est localement sommable, donc définit une distribution. Les dérivées (usuelles) des Y_λ s'obtiennent facilement, car (pour $x > 0$)

$$\frac{d}{dx} Y_\lambda(x) = \frac{\lambda - 1}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-2} = Y_{\lambda-1}(x).$$

La dérivée (usuelle) d'ordre k est donc (pour $x \neq 0$)

$$\text{(A,5,2)} \qquad \frac{d^k}{dx^k} Y_\lambda(x) = Y_{\lambda-k}(x).$$

Si la partie réelle de $\lambda - k$ est positive, $Y_{\lambda-k}$ est localement sommable, de sorte que (5,2) représente aussi la dérivation au sens des distributions.

On montre que la relation (5,2) reste valable, au sens des distributions, dans tous les cas, à condition de remplacer, le cas échant, Y_λ et $Y_{\lambda-k}$ par les distributions pseudo-fonctions correspondantes.

Un cas particulier remarquable s'observe lorsque λ est un entier négatif $-m$. L'écriture fonctionnelle $\dfrac{x^{-m-1}}{\Gamma(-m)}$ n'a plus de sens, puisque $\Gamma(-m)$ est infini. Mais la distribution pseudo-fonction Y_{-m} existe. On l'obtient en dérivant $m+1$ fois la distribution Y_1 — qui n'est autre que la fonction d'Heaviside définie en (3,7) —. Utilisant le résultat (3,8), on obtient les dérivées de la mesure de Dirac :

$$\text{(A,5,3)} \qquad \begin{cases} Y_0 = \delta \\ Y_{-m} = \delta^{(m)}. \end{cases}$$

5.-2. — *Distributions* $x_+^\lambda | x |^\lambda$ *etc.* — Par définition, nous appellerons x_+^λ la distribution

$$x_+^\lambda = \Gamma(\lambda + 1) Y_{\lambda+1} \tag{A,5,4}$$

qui coïncide avec la formation monome ordinaire pour $R_e(\lambda) > 0$. Sa transposée sera désignée par x_-^λ :

$$x_-^\lambda = \Gamma(\lambda + 1) \check{Y}_{\lambda+1} = \Gamma(\lambda + 1) Y_{\lambda+1}(-x). \tag{A,5,5}$$

Ces distributions sont définies pour toutes valeurs de λ, sauf les entiers négatifs ($\Gamma(-m)$ étant infini). En $\lambda = -m$, la fonction de λ définie par $x_+^\lambda(\varphi)$ présente un pôle en $\dfrac{1}{\lambda + m}$ de résidu $\dfrac{\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}$, tandis que x_-^λ possède le même pôle en $\lambda = -m$, mais avec le résidu

$$(-1)^{m-1} \frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}.$$

On introduit aussi les deux distributions, symétrique et antisymétrique :

$$\begin{cases} |x|^\lambda = x_+^\lambda + x_-^\lambda \\ |x|^\lambda \operatorname{Sgn} x = x_+^\lambda - x_-^\lambda. \end{cases} \tag{A,5,6}$$

(le sigle $\operatorname{Sgn} x$ se lit : signe de x). $|x|^\lambda$ n'a de pôles que pour $\lambda = -1$, -3, etc..., car pour un entier pair les résidus de x_+^λ et x_-^λ sont opposés. De même, $|x|^\lambda \operatorname{Sgn} x$ n'a de pôle que pour λ entier négatif pair. On en déduit la définition de la distribution x^{-n} (n entier quelconque) :

$$\begin{cases} x^{-2m} = |x|^{-2m} \\ x^{-2m-1} = |x|^{-2m-1} \operatorname{Sgn} x. \end{cases} \tag{A,5,7}$$

La fonction $\log |x|$, localement sommable, définit une distribution, dont les dérivées successives permettent de retrouver la distribution x^{-n} introduite en (5,7) !

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} \log |x| = x^{-1} \\ \dfrac{d^n}{dx^n} \log |x| = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}. \end{cases} \tag{A,5,8}$$

5.-3. — *Distribution* r^λ. — Dans l'espace à n dimensions, le Laplacien (au sens usuel) de la fonction r^λ est donné par

$$\Delta r^\lambda = \lambda(\lambda + n - 2) r^{\lambda-2}. \tag{A,5,9}$$

Cette relation subsiste au sens des distributions, à condition de remplacer, le cas échant (c'est-à-dire quand $R_e(\lambda) \leqslant -n$) la fonction r^λ par la distribution pseudo-fonction qui la généralise. L'application réitérée de (5,9) permet d'obtenir toutes ces pseudo-fonctions à partir des fonctions r^λ pour lesquelles $R_e(\lambda) > -n$, sauf toutefois pour les valeurs entières $\lambda = -n, -n-2, -n-4$....

La distribution f_λ, qui se déduit de r^λ par

$$f_\lambda = \frac{2^{-\frac{\lambda}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} r^\lambda \tag{A,5,10}$$

vérifie l'équation.

$$\Delta f_\lambda = \lambda f_{\lambda-2}. \tag{A,5,11}$$

Elle est définie même pour $\lambda = -n, -n-2\ldots$ Pour ces valeurs, on retrouve les mesures de Dirac et leurs Laplaciens. De (3,9), on tire directement

$$\begin{cases} f_{-n} = \dfrac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta \\ f_{-n-2k} = (-1)^k \dfrac{2^{\frac{n}{2}-k}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} \Delta^{(k)}\delta. \end{cases} \tag{A,5,12}$$

6. — Convolution.

6.-1. — ***Convolution pour les fonctions.*** — Le produit de convolution $f * g$ de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ est défini par

$$f * g = \int f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi. \tag{A,6,1}$$

Il n'a de sens que si f et g vérifient des conditions convenables de sommabilité. Si f et g sont localement sommables, le produit de convolution a toujours un sens si l'une des deux fonctions a un support borné, ou encore, dans l'espace à une seule dimension, lorsque f et g sont identiquement nulles pour $x < 0$: dans ce dernier cas, la convolution s'écrit

$$f * g = \int_0^x f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_0^x f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi. \tag{A,6,2}$$

Le produit de convolution est commutatif ($f * g = g * f$) et associatif.

Si l'on considère f et g comme des distributions, on voit que $f * g$ agit sur une fonction de base φ selon la formule

$$\begin{cases} f * g(\varphi) = \int f(x-\xi)\, g(\xi)\, \varphi(x)\, d\xi\, dx \\ \qquad\quad = \int f(\eta)\, g(\xi)\, \varphi(\xi+\eta)\, d\xi\, d\eta. \end{cases} \tag{A,6,3}$$

Autrement dit, $f * g$ agit sur $\varphi(x)$ comme $f(x)\, g(y)$, considérée comme fonction de l'espace à $2n$ dimensions, le fait sur $\varphi(x+y)$.

6.-2. — *Produit tensoriel de deux distributions.* — La notion de fonction $f(x)g(y)$ considérée comme fonction de l'espace à $2n$ dimensions (espace des points définis par les $2n$ coordonnées $x_1 \ldots x_n y_1 y_n$) s'étend aux distributions. On appelle produit tensoriel de deux distributions S et T définies dans des espaces à n_1 et n_2 dimensions respectivement, et on note $S \times T$, une distribution de l'espace à $n_1 + n_2$ dimensions (espace des points de coordonnées $x_1 \ldots x_{n_1, y_1 \cdots y_{n_2}}$) agissant sur les fonctions de bases de la forme $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ selon la formule

$$S \times T(\varphi_1\varphi_2) = [S(\varphi_1)][T(\varphi_2)].$$

On démontre qu'une telle distribution existe et est unique. Elle agit sur toutes les fonctions de base $\varphi(x, y)$, et non pas seulement sur les fonctions de la forme $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$.

Par exemple, si l'on note $1(x_1)$ la fonction de la variable x_1 identique à l'unité, une distribution, ou une fonction, indépendante de x_1 se met sous la forme :

$$1(x_1) \times T(x_2 \ \ldots \ x_n).$$

Une telle distribution agit sur $\varphi(x_1 x_2 \ \ldots \ x_n)$ comme T sur la fonction des $n - 1$ variables $x_2 \ldots x_n$ définie par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1 x_2 \ \ldots \ x_n)\, dx_1.$$

En ce qui concerne les dérivations, on a la règle évidente :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} S(x) \times T(y) = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} S(x)\right] \times \left[\frac{\partial}{\partial y_j} T(y)\right].$$

et, pour les mesures de Dirac

$$\text{(A,6,4)} \qquad \delta(x_1) \times \delta(x_2) \cdots \times \delta(x_n) = \delta(x_1, x_2 \ \ldots \ x_n).$$

6.-3. — *Convolution des distributions.* — Le produit de convolution de deux distributions S et T de l'espace à n dimensions est la distribution $S * T$ qui agit sur $\varphi(x)$ de la même manière que le produit tensorie $S \times T$ le fait sur $\varphi(x + y)$ dans l'espace à $2n$ dimensions.

$$\text{(A,6,5)} \quad S * T(\varphi) = S \times T[\varphi(x + y)] = \int S(x)\, T(y)\, \varphi(x + y)\, dx\, dy.$$

Cependant, en général, $\varphi(x + y)$ n'appartient pas au même espace de fonctions que $\varphi(x)$. Par exemple, si φ est à support borné dans l'espace à n dimensions, le support de $\varphi(x + y)$ dans l'espace à $2n$ dimensions n'est pas borné. Le produit de convolution n'existe donc pas toujours. Mais il existe au moins dans chacun des deux cas suivants.

— l'une des deux distributions a un support borné (appartient à $\mathcal{E}'$);

— les deux distributions ont leur support dans le quadrant

$$x_1 \geqslant 0 \ \ldots \ x_n \geqslant 0.$$

On définit, de même, le produit de convolution d'un nombre quelconque de distributions : par exemple, $R * S * T$ agit sur φ comme $R \times S \times T$ sur $\varphi(x + y + z)$. Un tel produit a un sens, notamment, si toutes les distributions, sauf une au plus, ont leur support borné, ou encore si elles ont toutes leurs supports dans le quadrant positif.

Le produit de convolution (quand il existe au sens de la définition ci-dessus) est *associatif et commutatif* :

$$\text{(A,6,6)} \qquad \begin{cases} S * T = T * S \\ R * (S * T) = (R * S) * T = R * S * T. \end{cases}$$

La mesure de Dirac δ, ou l'une quelconque de ses dérivées $D\delta$, ont un support ponctuel. La convolution $\delta * T$ ou $D\delta * T$ existe donc pour toute distribution T. On a

$$\text{(A,6,7)} \qquad \begin{cases} \delta * T = T \\ D\delta * T = DT. \end{cases}$$

La convolution par δ est *l'opérateur unité*. La convolution par $D\delta$ est *l'opérateur de dérivation* D. De (6,6) résulte que pour dériver $S * T$, il suffit de dériver soit S soit T

$$\text{(A,6,8)} \qquad D(S * T) = D\delta * S * T = DS * T = S * DT.$$

De même, la convolution par $\delta_h = \delta(x - h)$, mesure de Dirac au point h, n'est pas autre chose que la *translation* par le vecteur h

$$\text{(A,6,9)} \qquad \delta_h * T = \tau_h T = T(x - h).$$

Enfin, le produit de convolution d'une distribution quelconque T par une fonction α indéfiniment dérivable est une fonction indéfiniment dérivable, dite *régularisée de* T *par* α. On obtient cette fonction en faisant agir T sur $\alpha(x - \xi)$, conformément à la notation symbolique.

$$\text{(A,6,10)} \qquad (T * \alpha)(x) = \int T(\xi)\, \alpha(x - \xi)\, d\xi.$$

En ce qui concerne la *continuité de la convolution*, citons le résultat suivant : Si une suite de distribution T_i converge vers T, $T_i * S$ converge vers $T * S$ au moins dans chacun des trois cas suivants :

— Les T_i ont leur support contenu dans un même ensemble borné.

— S a un support borné.

— Les T_i et S sont bornés d'un même côté (par exemple, ont toutes leurs supports dans le quadrant positif).

Si au lieu d'une suite T_i on a une distribution T_λ dépendant d'un paramètre λ continu tel que la dérivée $\frac{\partial T_\lambda}{\partial \lambda}$ existe, on a, au moins dans les trois mêmes circonstances :

$$\text{(A,6,11)} \qquad \frac{\partial}{\partial \lambda}(T_\lambda * S) = \frac{\partial T \lambda}{\partial \lambda} * S.$$

Exemple. — Dans l'espace à trois dimensions, le potentiel newtonien engendré au point $(x_1x_2x_3)$ par une densité de masse $\mu(\xi_1\xi_2\xi_3)$ est donné par

$$(A,6,12)\quad U(x_1x_2x_3) = -\iiint \frac{\mu[\xi_1\xi_2\xi_3]\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}}.$$

Ce qui s'écrit plus commodément sous la forme

$$U = -\mu * \frac{1}{r}.$$

Prenons le laplacien :

$$\Delta U = \Delta\delta * U = -\Delta\delta * \mu * \frac{1}{r} = -\mu * \Delta\frac{1}{r}.$$

Compte tenu de (3,9), on obtient l'équation de Poisson

$$(A,6,13)\qquad \Delta U = 4\pi\mu.$$

Inversement, si l'on cherche une solution de (6,13), il suffit de faire la convolution par $\frac{1}{r}$ des deux membres de cette équation pour retrouver (6,12). La solution générale s'en déduit par addition d'une fonction f harmonique quelconque ($\Delta f = 0$).

7. — Intégration et dérivation d'ordre quelconque.

7.-1. — Convolutions des distributions Y_λ. — Cherchons, en premier lieu, le produit de convolution $Y_\lambda * Y_\mu$ lorsque λ et μ ont leurs parties réelles positives. Sous la forme (6,2), on a :

$$Y_\lambda * Y_\mu = \int_0^x \frac{\xi^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\frac{(x-\xi)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\,d\xi.$$

En posant $\xi = xt$, et en utilisant la formule (B-10) de l'annexe B, il vient :

$$Y_\lambda * Y_\mu = \frac{x^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}\,dt = \frac{x^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda+\mu)}.$$

D'où le résultat

$$(A,7,1)\qquad Y_\lambda * Y_\mu = Y_{\lambda+\mu}$$

qui s'étend aux valeurs quelconques de λ et μ pour les distributions Y_λ, par suite de l'unicité des prolongements analytiques.

7.-2. — L'intégration d'ordre λ. — L'intégrale de Cauchy :

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x g(\xi)(x-\xi)^{n-1}\,d\xi = \int_0^x\int_0^{\xi_n}\cdots\int_0^{\xi_1} g(\xi)\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_{n-1}$$

donne la $n^{ième}$ primitive d'une fonction $g(x)$, définie pour $x \geqslant 0$, sous la forme d'une intégrale simple, qui n'est autre que le produit de convolution $g * Y_n$. Pour λ quelconque, et une distribution T à support contenu dans la demi-droite $x \geqslant 0$, on définit l'intégrale d'ordre λ par le produit de convolution $g * Y_\lambda$. De (7,1), on déduit que deux intégrations successives d'ordre λ et μ sont équivalentes à une seule intégration d'ordre $\lambda + \mu$

$$Y_\lambda * Y_\mu * T = Y_{\lambda+\mu} * T.$$

Lorsque λ est un entier négatif $-m$, (5,3) et (6,7) montrent que l'on a :

$$Y_{-m} * T = \delta^{(m)} * T = \frac{d^m T}{dx^m}.$$

L'intégration d'ordre $-m$ n'est pas autre chose que la dérivation d'ordre m. On définit la dérivation d'ordre quelconque par la formule

$$\frac{d^\mu}{dx^\mu} T = Y_{-\mu} * T.$$

C'est l'opération inverse de l'intégration.

8. — Transformations de Fourier et de Hankel.

8.-*1.* — *Transformations de Fourier pour les fonctions.* — La transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ d'une fonction $f(x)$ de la variable ordinaire x (1 seule dimension) est donnée par

$$\text{(A,8,1)} \qquad \mathcal{F}f = g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi ux}\, dx.$$

La transformation conjuguée (ou inverse) $\overline{\mathcal{F}}$ donne la *formule de réciprocité*

$$\text{(A,8,2)} \qquad \overline{\mathcal{F}}g = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{2i\pi ux}\, du.$$

La dérivée f' de f a pour transformée $2i\pi u\, g(u)$. Plus généralement, on a :

$$\text{(A,8,3)} \qquad \begin{cases} \mathcal{F}f^{(m)} = (2i\pi u)^m g(u) \\ \mathcal{F}[x^m f(x)] = \dfrac{1}{(-2i\pi)^m} g^{(m)}(u). \end{cases}$$

Si l'on remplace x par λx (λ nombre réel non nul) on a

$$\text{(A,8,4)} \qquad \mathcal{F}[f(\lambda x)] = \frac{1}{|\lambda|} g\left(\frac{u}{\lambda}\right)$$

Désignant par $\check{f}(x) = f(-x)$ la transposée d'une fonction f, par $\bar{f}$ la fonction complexe conjuguée, et par $\tilde{f}(x) = \bar{f}(-x)$ la conjuguée transposée (ou hermétique conjuguée), on a

$$\text{(A,8,5)} \qquad \begin{cases} \check{g} = \bar{\mathcal{F}}f = \mathcal{F}\check{f} \\ \bar{g} = \bar{\mathcal{F}}\bar{f} = \mathcal{F}\tilde{f} \\ \tilde{g} = \bar{\mathcal{F}}\tilde{f} = \mathcal{F}\bar{f}. \end{cases}$$

Citons encore la formule de Plancherel-Parseval

$$\text{(A,8,6)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|^2\, du \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)\,\overline{g_2(u)}\, du \end{cases}$$

et la formule sommatoire de Poisson [cf. A(4,3)].

Dans l'espace à n dimensions, on a des résultats semblables. En écrivant x au lieu de $(x_1, \ldots x_n)$, u au lieu de $(u_1 \ldots u_n)$, en désignant par dx et du les éléments de volumes, et par ux le produit scalaire

$$ux = u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n$$

on a

$$\text{(A,8,7)} \qquad \begin{cases} g(u) = \mathcal{F}f = \displaystyle\int f(x)e^{-2i\pi ux}\, dx \\ f(x) = \bar{\mathcal{F}}g = \displaystyle\int g(u)e^{2i\pi ux}\, du. \end{cases}$$

La formule (8,3) se généralise aux dérivées partielles. Avec

$$m = m_1 + \cdots + m_n,$$

on a, par exemple,

$$\text{(A,8,8)} \qquad \mathcal{F}\left[\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}\right] = (2i\pi)^m u_1^{m_1} \ldots u_n^{m_n} g(u).$$

La formule (8,4) devient

$$\text{(A,8,9)} \qquad \mathcal{F}[f(\lambda x)] = \frac{1}{|\lambda|^n} g\left(\frac{u}{\lambda}\right).$$

Les formules (8,5), (8,6) et la formule sommatoire (4,3) s'appliquent encore. Un cas particulier intéressant est celui des fonctions isotropes. Posons :

$$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$
$$\rho = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

Une fonction isotrope est de la forme $f(r)$. Sa transformée de Fourier

$g(\rho)$ est également isotrope. Les intégrales multiples (8,7) se ramènent à des intégrales simples :

$$\text{(A,8,10)} \quad \begin{cases} \mathcal{F}_n[f(r)] = g(\rho) = 2\pi\rho^{1-\frac{n}{2}} \displaystyle\int_0^\infty r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi\rho r)\, f(r)\, dr \\ \mathcal{F}_n[g(\rho)] = f(r) = 2\pi r^{1-\frac{n}{2}} \displaystyle\int_0^\infty \rho^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi\rho r)\, g(\rho)\, d\rho. \end{cases}$$

$J_{\frac{n}{2}-1}$ désigne la fonction de Bessel d'ordre $\frac{n}{2} - 1$ (Annexe C). On écrit $\mathcal{F}_n$ pour rappeler qu'il s'agit de la transformation de Fourier dans l'espace à n dimensions. Si $f(r)$ et $g(\rho)$ sont considérées comme des fonctions d'une seule variable (r ou ρ), $\mathcal{F}_n$ représente la transformation de Hankel d'ordre n, et se généralise à des valeurs non entières de n.

— La propriété la plus importante de la transformation de Fourier est *qu'elle transforme un produit de convolution en produit ordinaire* :

$$\text{(A,8,11)} \qquad \mathcal{F}[(f_1 * f_2] = [\mathcal{F}(f_1)]\,\mathcal{F}[(f_2)] = g_1 g_2.$$

On le voit sans peine en appliquant (8,1) à (6,1), et ce résultat est vrai aussi dans l'espace à n dimensions.

Naturellement, ces diverses formules ne peuvent pas être appliquées à n'importe quelle fonction $f(x)$.

Si $f(x)$ est sommable, $g(u)$ existe, est une fonction continue de u, et tend vers 0 à l'infini. Mais $g(u)$ n'est pas nécessairement sommable, et la formule réciproque (8,2) ne s'applique pas en général.

Si f est à variation bornée, g existe, est continu (sauf en $u = 0$) et tend encore vers 0 à l'infini.

Si f est une fonction de carré sommable, il est possible de donner un sens à $g = \mathcal{F}f$, qui est alors également de carré sommable, et la formule de Plancherel (8,6) s'applique.

En ce qui concerne (8,3), on montre que si f est m fois dérivable, et sommable ainsi que ses m dérivées, $u^m g(u)$ est bornée. De même, si $x^m f(x)$ est sommable, $g(u)$ est m fois dérivable et $g^{(m)}$ est borné. Autrement dit, *la transformation de Fourier échange entre elles les propriétés de dérivabilité et de régularité à l'infini.*

Il existe une catégorie, ou *espace* $(\mathcal{S})$ de fonctions, à la fois très régulières à l'infini et indéfiniment dérivables, défini comme suit : Une fonction φ appartient à $(\mathcal{S})$ si elle est indéfiniment dérivable et décroît, à l'infini, plus rapidement que n'importe quelle puissance de $\frac{1}{r}$, ainsi que chacune de ses dérivées.

Plus brièvement, $(\mathcal{S})$, *est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.* Par exemple, $\exp(-r^2)$ appartient à $(\mathcal{S})$.

On montre que si une fonction f appartient à $(\mathcal{S})$, sa transformée de Fourier g existe toujours et appartient également à $(\mathcal{S})$ et que toutes les formules données ci-dessus sont applicables à f et à g.

8.-2. — ***Transformées de Fourier des Distributions.*** — Il n'est pas possible de définir la transformée de Fourier de n'importe quelle distribution, mais seulement celles des *distributions dites tempérées*. L'espace de ces distributions particulières est le dual $(\mathcal{S}')$ de $(\mathcal{S})$: autrement dit, *les distributions tempérées sont les fonctionnelles linéaires et continues définies sur l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.* (Cette continuité s'entend au sens de la convergence de $(\mathcal{S})$, sur laquelle nous n'insisterons pas).

Une fonction sommable, ou bornée, ou, plus généralement à croissance lente [telle que $f(x) \leqslant A|x|^k$ quand $|x| \to \infty$] est une distribution tempérée. Une distribution de $(\mathcal{E}')$ (à support borné) est tempérée, puisque $(\mathcal{S})$ est un sous-espace de $\mathcal{E}$.

Pour qu'une distribution T soit tempérée, il faut et il suffit qu'elle soit une dérivée (d'ordre quelconque) d'une fonction à croissance lente. Ainsi, toutes les dérivées successives d'une distribution tempérée sont elles-mêmes tempérées. En particulier, Y_λ, x_+^λ, r^λ etc... sont tempérées. Par contre, e^x n'est pas tempérée, puisqu'elle n'est dérivée d'aucune fonction à croissance lente.

On définit la transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ ou $\bar{\mathcal{F}}T$ d'une distribution tempérée T comme la fonctionnelle agissant sur une fonction φ de $(\mathcal{S})$ de la même manière que T sur $\mathcal{F}\varphi$ ou $\bar{\mathcal{F}}\varphi$

$$\text{(A,8,12)} \qquad \begin{cases} \mathcal{F}T(\varphi) = T(\mathcal{F}\varphi) \\ \bar{\mathcal{F}}T(\varphi) = T(\bar{\mathcal{F}}\varphi). \end{cases}$$

Comme φ appartient à $(\mathcal{S})$, il en est de même de $\mathcal{F}\varphi$, de sorte que T agit effectivement sur $\mathcal{F}\varphi$. La fonctionnelle $\mathcal{F}T$ ainsi définie est linéaire, et on montre qu'elle est continue pour la convergence de $(\mathcal{S})$. Ainsi, *les transformées de Fourier des distributions tempérées sont elles-mêmes des distributions tempérées.*

— La formule de réciprocité s'établit immédiatement. De la définition (8,12) découle :

$$\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}T(\varphi) = \mathcal{F}T(\bar{\mathcal{F}}\varphi) = T(\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\varphi).$$

Comme $\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\varphi = \varphi$, selon (8,7), pour les fonctions φ de $(\mathcal{S})$, on a bien

$$\text{(A,8,13)} \qquad \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}T = T.$$

Une distribution T *à support borné* (appartenant à $\mathcal{E}'$) agit sur l'exponentielle $e^{-2\pi i u x}$, qui est indéfiniment dérivable (appartient à $\mathcal{E}$) de sorte que $T(e^{-2i\pi ux})$ est défini. C'est une fonction de u, $V(u)$. Symboliquement, on a :

$$\text{(A,8,14)} \qquad V(u) = T(e^{-2i\pi ux}) = \int T(x)\, e^{-2i\pi ux}\, dx.$$

On démontre que cette fonction $V(u)$ est indéfiniment dérivable en u, et peut même être prolongée, pour les valeurs complexes $(u_1 + iv_1, \ldots, u_n + iv_n)$ de u en une fonction holomorphe entière, et qu'elle est iden-

tique à la transformée $\mathcal{F}T$ défini en (8,12). (Ce théorème admet une réciproque plus précise).

Ainsi, *la transformée d'une distribution à support bornée* T *est une fonction* V(*u*) *prolongeable en une fonction holomorphe entière pour les valeurs complexes de u. On peut calculer* V(*u*) *en appliquant* T *à* $e^{-2i\pi ux}$.

Ainsi, la transformée de la mesure de Dirac $\delta(x)$ s'obtient en appliquant δ à $e^{-2i\pi ux}$, ce qui donne :

$$\mathcal{F}\delta = 1 \tag{A,8,15}$$

et, plus généralement :

$$\mathcal{F}\frac{\partial^m \delta}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} = (2\pi i)^m u_1^{m_1} \dots u_n^{m_n}. \tag{A,8,16}$$

De même

$$\mathcal{F}\delta(x - h) = e^{-2i\pi hu}. \tag{A,8,17}$$

Ces formules ont pour réciproques

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1 = \delta \\ \mathcal{F}[x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}] = \dfrac{1}{(-2\pi i)^m} \delta^{m_1}(x_1) \times \dots \times \delta^{m_n}(x_n). \end{cases} \tag{A,8,18}$$

Le produit de convolution $S * T$ de deux distributions tempérées S et T a un sens, en particulier, si l'une d'entre elles, par exemple T, a un support borné. Dans ce cas, la transformée de $S * T$ est le produit :

$$\mathcal{F}(S * T) = (\mathcal{F}S)(\mathcal{F}T) \tag{A,8,19}$$

de la distribution $\mathcal{F}S$ par $\mathcal{F}T$, qui est une fonction indéfiniment dérivable, et ce produit a bien un sens d'après le paragraphe 2-3.

Par exemple, la dérivée $T' = \delta' * T$ d'une distribution à une variable $T(x)$ a pour transformée

$$\mathcal{F}T' = (\mathcal{F}\delta')(\mathcal{F}T) = 2\pi i x\, T(x)$$

de sorte que les relations (8,3) et (8,8) s'appliquent aux distributions tempérées.

Citons, pour terminer, les transformées de Fourier de quelques fonctions [1] et distributions usuelles. L'exponentielle de Gauss $e^{-\lambda r^2}$ donne, dans l'espace à n dimensions

$$\mathcal{F}_n e^{-\lambda r^2} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi^2 \rho^2}{\lambda}}. \tag{A,8,20}$$

En appliquant la formule sommatoire de Poisson (4,3) avec $n = 1$, on obtient la formule de transformation des fonctions thêta :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda k^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{\lambda} k^2}. \tag{A,8,21}$$

[1] On trouvera des tables plus complètes de transformées de Fourier dans Guelfand et Chilov (*op. cit.*).

— Pour la distribution r^λ, dans l'espace à n dimensions, et pour λ différent de $2k$ et de $-n-2k$ (k entier positif), on a

$$\text{(A,8,22)} \qquad \mathcal{F}_n r^\lambda = \pi^{-\lambda-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} \rho^{-\lambda-n}.$$

Pour $\lambda = 2k$ ou $n-2k$, on a, respectivement

$$\text{(A,8,23)} \quad \begin{cases} \mathcal{F}_n r^{2k} = \dfrac{(-1)^k}{4\pi^2} \Delta^{(k)} \delta \\ \mathcal{F}_n r^{-n-2k} = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}+2k}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+2k\right)} \dfrac{(-1)^k}{k!} \\ \qquad \left[2\log\dfrac{1}{\pi\rho} + \dfrac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)} + \dfrac{\Gamma'\left(k+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)} \right] \rho^{2k}. \end{cases}$$

En particulier, pour $\lambda = -n$ il vient $\left(\text{avec } C = -\dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}, \text{ voir Annexe B}\right)$

$$\text{(A,8,24)} \quad \begin{cases} \mathcal{F}_n \dfrac{1}{r^n} = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[2\log\dfrac{1}{\pi\rho} - C + \dfrac{\Gamma'\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right] \\ \mathcal{F}_n \log\dfrac{1}{r} = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\pi^{-\frac{n}{2}}}{2} \rho^{-n} \\ \qquad + \dfrac{1}{2} \left[C - \dfrac{\Gamma'\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + 2\log\pi \right] \delta. \end{cases}$$

A une seule dimension, on trouve

$$\text{(A,8,25)} \qquad \mathcal{F}\log|x| = -\frac{1}{2}|u|^{-1} - (C + \log 2\pi)\,\delta.$$

Et par dérivation :

$$\text{(A,8,26)} \quad \begin{cases} \mathcal{F}x^{-1} = -i\pi \operatorname{Sgn} u = \begin{cases} +i\pi & \text{pour } u < 0 \\ -i\pi & \text{pour } u > 0 \end{cases} \\ \mathcal{F}x^{-k-1} = -\dfrac{(-2i\pi u)^k}{k!} i\pi \operatorname{Sgn} u. \end{cases}$$

La fonction $(1+r^2)^\lambda$ est indéfiniment dérivable et à croissance lente.

C'est une distribution tempérée, et par suite il en est de même de sa transformée de Fourier :

$$(A,8,27) \qquad \mathcal{F}_n(1+r^2)^\lambda = \frac{2\pi^{-\lambda}}{\Gamma(-\lambda)}\rho^{-\lambda-\frac{n}{2}}K_{\frac{n}{2}+\lambda}(2\pi\rho).$$

La fonction K_μ représente la fonction de Bessel modifiée de 2e espèce (Annexe C). Le deuxième membre est une pseudo-fonction pour

$$\lambda > -\frac{n}{2}.$$

Pour λ entier, on a

$$(A,8,28) \qquad \mathcal{F}_n(1+r^2)^k = \left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k \delta.$$

De même, la fonction $(1-r^2)_+^\lambda$ (ou la pseudo-fonction correspondante) définie par

$$\begin{cases} (1-r^2)_+^\lambda = (1-r^2)^\lambda & \text{pour } r^2 < 1 \\ (1-r^2)_+^\lambda = 0 & \text{pour } r^2 > 1 \end{cases}$$

a pour transformée la fonction de Bessel de 1re espèce :

$$(A,8,29) \qquad \mathcal{F}_n(1-r^2)_+^\lambda = \pi^{-\lambda}\Gamma(1+\lambda)\rho^{-\lambda-\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}+\lambda}(2\pi\rho).$$

Les formules (8,27) et (8,29) admettent les réciproques suivantes :

$$(A,8,30) \qquad \begin{cases} \mathcal{F}_n r^{-\mu}J_\mu(r) = \dfrac{2^{n-\mu}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\mu-\frac{n}{2}\right)}(1-4\pi^2\rho^2)^{\mu-\frac{n}{2}} \\ \mathcal{F}_n r^{-\mu}K_\mu(r) = 2^{n-1-\mu}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(-\mu+\dfrac{n}{2}\right)(1+4\pi^2\rho^2)^{\mu-\frac{n}{2}}. \end{cases}$$

9. — Fonctions et distributions de type positif.

9.-1. — *Fonctions de type positif.* — Soit une fonction continue $f(x)$ du point x de l'espace à n dimensions. On dit que $f(x)$ est de type positif (ou définie positive) si, quels que soient les points $x_1 \ldots x_k$ et les nombres complexes $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ (k entier quelconque), on a

$$(A,9,1) \qquad \sum_{ij} f(x_i - x_j)\lambda_i\bar{\lambda}_j \geqslant 0.$$

On démontre que, lorsque $f(x)$ est de type positif on a aussi

$$(A,9,2) \qquad \int f(x-\xi)\,\varphi(x)\,\overline{\varphi(\xi)}\,dx\,d\xi \geqslant 0$$

pour toute fonction φ de $(\mathcal{D})$ et réciproquement, de sorte que (9,1) et (9,2) sont des définitions équivalentes.

Une fonction de type positif vérifie les propriétés suivantes :

— Elle possède la symétrie hermitique (coïncide avec sa conjuguée transposée)

$$f(x) = \overline{f(-x)}.$$

— Elle est bornée par sa valeur à l'origine $f(0)$, nécessairement réelle d'après (9,3) et positive :

(A,9,4) $\qquad f(0) \geqslant 0 \qquad$ et $\qquad |f(x)| \leqslant f(0).$

Les fonctions de type positif jouent un rôle fondamental en calcul des probabilités : Les fonctions caractéristiques des lois de répartition et les fonctions de covariance (d'autocorrélation) des processus stochastiques sont, en effet, de type positif. Le théorème essentiel, à ce sujet, est le suivant :

Théoreme de Bochner. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue soit de type positif est qu'elle soit transformée de Fourier d'une mesure positive sommable* μ.

La somme de cette mesure $\int d\mu$ est égale à $f(0)$. Si donc $f(0) = 1$, cette mesure positive μ définit une loi de probabilité.

9.-2. — *Distribution de type positif.* — Dans la définition (9,2), changeons ξ en $-\xi$, et désignons par $\tilde{\varphi}(\xi) = \overline{\varphi}(-\xi)$ la conjuguée transposée de φ : il vient

$$\int f(x+\xi)\,\varphi(x)\,\tilde{\varphi}(\xi)\,dx\,d\xi = \int f(x)\,dx \int \varphi(x-\xi)\tilde{\varphi}(\xi)\,d\xi \geqslant 0.$$

En considérant f comme une fonctionnelle, on voit que (9,2) s'écrit :

$$f(\varphi * \tilde{\varphi}) \geqslant 0.$$

Cette définition se généralise immédiatement à une distribution T quelconque : On dira que T est de type positif si, pour toute fonction φ de $(\mathcal{D})$, on a :

(A,9,5) $\qquad T(\varphi * \tilde{\varphi}) \geqslant 0.$

La bi-régularisée $T * \psi * \tilde{\psi}$ de T par une fonction ψ de $(\mathcal{D})$ est une fonction continue de type positif. (En effet, c'est une fonction continue, d'après le paragraphe (6,2), et elle vérifie (9,2), puisque $T * \psi * \tilde{\psi}$ agit sur $\varphi * \tilde{\varphi}$ comme T sur $\varphi * \tilde{\varphi} * \psi * \tilde{\psi}$, et que T vérifie (9,5).

On montre que les distributions de type positif ont la symétrie hermitique :

(A,9,6) $\qquad T = \tilde{T}$

et qu'elles sont nécessairement *tempérées*, de sorte qu'elles admettent toujours des transformées de Fourier. Le résultat le plus important est le suivant :

Théorème de Bochner. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une distribution* T *soit de type positif est qu'elle soit transformée de Fourier d'une mesure positive à croissance lente (tempérée)* μ.

Si cette mesure μ *est sommable, alors la distribution* T *est une fonction de type positif, obligatoirement continue,* vérifiant $T(0) = \int d\mu$. Si μ n'est pas sommable, la distribution T ne peut pas être une fonction continue.

Lorsque le produit de convolution $S * \tilde{S}$ d'une distribution par sa conjuguée transposée a un sens (par exemple, si S est à support borné), *la distribution* $S * \tilde{S}$ *est de type positif.* En effet l'action de $\tilde{S} * S$ sur $\varphi * \tilde{\varphi}$ s'obtient en faisant $x = 0$ dans la fonction

$$S * \tilde{S} * \varphi * \tilde{\varphi} = (S * \varphi) * (\tilde{S} * \tilde{\varphi}),$$

d'où

$$S * \tilde{S}(\varphi * \tilde{\varphi}) = \int |S * \varphi|^2 \, dx \geqslant 0.$$

Exemple. — La fonction r^λ, pour $\lambda > -n$, est une fonction positive dans l'espace à n dimensions, donc aussi une mesure positive, d'ailleurs à croissance lente. Le théorème de Bochner, et (8,22) montrent que la distribution (pseudo-fonction) $\dfrac{1}{\Gamma\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)} r^{-\lambda-n}$ est de type positif pour $\lambda > -n$.

Par contre, si $\lambda \leqslant -n$, r^λ n'est pas une mesure. Sa transformée de Fourier, qui est la fonction $\dfrac{r^{-\lambda-n}}{\Gamma\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)}$, n'est pas de type positif (elle n'est d'ailleurs pas bornée). Ainsi r^μ, pour μ positif n'est pas de type positif.

Supposons $2k \leqslant \mu < 2(k+1)$. La transformée de r^μ est

$$\frac{r^{-\mu-n}}{\Gamma\left(-\dfrac{\mu}{2}\right)}.$$

Si nous nous limitons aux fonctions de bases ψ de $(\mathcal{D})$, s'annulant à l'origine ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre $2k$ compris (espace $(\mathcal{D}_{2k})$ de fonctions), la distribution $r^{-\mu-n}$ agit sur ces fonctions de la même manière que la fonction $r^{-\mu-n}$, les intégrales étant convergentes pour toute fonction de $(\mathcal{D}_{2k})$. Ainsi, on a

$$\frac{r^{-\mu-n}}{\Gamma\left(-\dfrac{\mu}{2}\right)} * (\psi\bar{\psi}) \geqslant 0.$$

pour toute fonction ψ de $(\mathcal{D}_{2k})$. Par transformation de Fourier, l'espace

$(\mathcal{D}_{2k})$ des fonctions nulles à l'origine ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $2k$ devient l'espace $(\mathcal{D}^{2k})$ des fonctions de $(\mathcal{D})$ ayant tous leurs moments nuls jusqu'à l'ordre $2k$. Par exemple $(\mathcal{D}_0)$, espace des fonctions ψ de $(\mathcal{D})$ telles que $\psi(0) = 0$, devient $(\mathcal{D}^0)$ espace des fonctions φ telles que $\int \varphi \, dx = 0$.

Si $\varphi = \mathcal{F}\psi$, la distribution $r^\mu = \mathcal{F}\dfrac{r^{-\mu-n}}{\Gamma(-\mu-n)}$ agit sur $\varphi * \tilde{\varphi}$ comme $\dfrac{r^{-\mu-n}}{\Gamma(-\mu-n)}$ sur $\mathcal{F}\varphi * \tilde{\varphi} = (\mathcal{F}\varphi)(\mathcal{F}\tilde{\varphi}) = \psi\bar{\psi}$. Par suite, si φ appartient à $(\mathcal{D}^{2k})$, on a :

(A,9,7) $$r^\mu(\varphi * \tilde{\varphi}) \geqslant 0.$$

Pour $\mu < 2(k+1)$, r^μ peut être considéré comme une distribution de type positif sur $(\mathcal{D}^{2k})$ (on dit aussi : *conditionnellement de type positif*). Pour $k = 0$, en particulier, (9,7) est vérifiée pour :

(A,9,8) $$\mu < 2.$$

Ainsi, r^μ, pour μ inférieur à 2, agit comme une distribution de type positif sur les fonctions φ de $(\mathcal{D})$ de somme nulle $\int \varphi \, dx = 0$.

Dérivées d'une distribution de type positif. — La dérivée dans une direction α, définie par le vecteur unitaire $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ est :

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial T}{\partial x_n}.$$

Si T est une distribution de type positif, sa dérivée seconde changée de signe, $-\dfrac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2}$, dans une direction α est également de type positif. On a, en effet :

$$-\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2}(\varphi * \tilde{\varphi}) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} * \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha}\right) = T\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} * \widetilde{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)}\right] \geqslant 0$$

(la dérivée de la transposée conjuguée $\dfrac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha}$ est égale à la transposée conjuguée de la dérivée $\widetilde{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)}$ changée de signe).

En particulier, si g est une fonction continue de type positif dérivable deux fois au sens usuel, $-\dfrac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}$ est elle-même une fonction continue de type positif. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que les dérivées secondes existent en $x = 0$. Dans l'espace à une dimension, en effet, $-g''$, distribution de type positif, est une fonction continue de type positif si la mesure $x^2\mu$ est sommable, μ étant la mesure positive transformée de Fourier de

g. Or, on voit facilement que $-g''(0)$ ne peut exister que si $\int x^2\, d\mu$ existe, et on a alors

$$g''(0) = \int x^2\, d\mu.$$

A n dimensions, on a une démonstration analogue. On voit que les irrégularités d'une fonction de type positif g sont, en quelque sorte, localisées en $x = 0$. Si g admet à l'origine des dérivées jusqu'à un ordre $2k$, elle est partout $2k$ fois dérivable.

ANNEXE B

LA FONCTION EULÉRIENNE $\Gamma(x)$

SOMMAIRE

Simple énumération des propriétés classiques de la fonction $\Gamma(x)$ *utilisées dans cet ouvrage.*

La fonction $\Gamma(x)$ est définie par l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1}\, du. \tag{B,1}$$

En faisant une intégration par parties, on obtient :

$$\Gamma(1 + x) = x\Gamma(x). \tag{B,2}$$

Pour $x = n$ entier positif, on en tire

$$\Gamma(1 + n) = n\,!. \tag{B,3}$$

Pour x négatif ou nul, l'intégrale (B,1) diverge. Mais $\Gamma(x)$, fonction analytique, peut être prolongée. Ce prolongement définit $\Gamma(x)$ pour x négatif non entier. On peut calculer les valeurs numériques par application répétée de (B,2), ou encore par la formule des compléments :

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} \pi x}. \tag{B,4}$$

Pour $x = -n$, entier négatif ou nul, $\Gamma(x)$ présente un pôle de résidu $\dfrac{(-1)^n}{n\,!}$.

Pour $x = \dfrac{1}{2}$, (B,4) donne :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{B,5}$$

Une autre formule utile est la suivante :

$$\text{(B,6)} \qquad \Gamma(2x) = \Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}.$$

La dérivée logarithmique $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ intervient dans beaucoup de problèmes. Elle vérifie la relation de récurrence obtenue en dérivant (B,2) : (n entier)

$$\text{(B,7)} \quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{\Gamma'(n+x+1)}{\Gamma(n+x+1)} = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1+x} + \cdots + \dfrac{1}{n+x}. \end{cases}$$

On a, numériquement :

$$\text{(B,8)} \quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\,\mathrm{C} = -\,0{,}577\,216\ldots \\ \dfrac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = -\,\mathrm{C} - 2\log 2 = -\,1{,}963\,52\ldots \end{cases}$$

La fonction eulérienne béta $\mathrm{B}(x,\ y)$ est définie par :

$$\text{(B,9)} \quad \mathrm{B}(xy) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta\,\sin^{2y-1}\theta\,d\theta.$$

On a :

$$\text{(B,10)} \qquad \mathrm{B}(x,\ y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

ANNEXE C

LES FONCTIONS DE BESSEL

SOMMAIRE

L'Annexe C est un simple rappel, sans démonstrations, des propriétés classiques des fonctions de Bessel auxquelles il est fait appel dans cet ouvrage. Le premier paragraphe traite de la fonction de première espèce J_λ, *et le deuxième de la fonction modifiée de 2e espèce* K_λ.

1. — Fonction de Bessel de 1re espèce.

La fonction $J_\lambda(x)$, ou fonction de Bessel de 1re espèce d'indice λ, est définie par le développement :

$$\text{(C,1,1)} \qquad J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Elle vérifie l'équation différentielle

$$\text{(C,1,2)} \qquad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2) y = 0$$

et les relations de récurrence

$$\text{(C,1,3)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}[x^\lambda J_\lambda(x)] = x^\lambda J_{\lambda-1}(x) \\ \dfrac{d}{dx}[x^{-\lambda} J_\lambda(x)] = -x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x). \end{cases}$$

Pour λ demi-entier, J_λ s'exprime à l'aide des fonctions trigonométriques. Par exemple :

$$\text{(C,1,4)} \qquad \begin{cases} J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \sin x, \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \cos x. \end{cases}$$

Pour λ quelconque, J_λ se comporte, à l'infini, comme une ligne trigonométrique de x multipliée par $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

On notera aussi, sur (C,1,1) que la fonction $x^{-\lambda}J_\lambda(x)$ est une série entière paire de x, c'est-à-dire ne contenant que des termes en x^{2k}.

$J_\lambda(x)$ admet diverses représentations intégrales. Les plus importantes sont liées au fait que J_λ est transformée de Hankel de $(1-\rho^2)^\mu$. Ce sont les formules (A,8,29) et (A,8,30) de l'annexe A.

L'équation de Bessel (C,1,2) admet une deuxième solution, qui est la fonction de Bessel de seconde espèce N_λ :

$$\text{(C,1,5)} \qquad N_\lambda = \frac{1}{\sin \lambda\pi}[\cos \lambda\pi \, J_\lambda - J_{-\lambda}].$$

Lorsque λ tend vers un entier, l'expression correspondante de N_λ s'obtient en effectuant, sur le développement de (C,1,5), un passage à la limite, qui fait apparaître des termes logarithmiques.

2. — Fonction de Bessel modifiée de 2e espèce.

Les fonctions de Bessel modifiées sont les solutions de l'équation obtenue en changeant x en ix dans (C,1,2). La fonction modifiée de 1re espèce, I_λ, s'obtient en changeant x en ix, à un facteur près, dans (C,1,1) :

$$\text{(C,2,1)} \quad I_\lambda(x) = \exp\left(-i\lambda\frac{\pi}{2}\right)J_\lambda(ix) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

$I_\lambda(x)$ se comporte à l'infini comme $\frac{1}{\sqrt{x}}e^x$.

L'équation modifiée admet une deuxième solution, qui est la fonction modifiée de deuxième espèce K_λ, définie par :

$$\text{(C,2,2)} \qquad K_\lambda(x) = \frac{\pi}{2\sin \lambda\pi}[I_{-\lambda}(x) - I_\lambda(x)] = K_{-\lambda}(x).$$

Ici encore, le passage à la limite lorsque λ tend vers un entier n, fait apparaître des termes logarithmiques dans le développement de (C,2,2).

Dans le cas où λ n'est pas un entier, le développement de la fonction $x^\lambda K_{-\lambda}(x)$ s'écrit explicitement :

$$\text{(C,2,3)} \quad \left\{ \begin{aligned} x^\lambda K_{-\lambda}(x) = {} & \frac{2^{\lambda-1}\pi}{\sin \lambda\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(-\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ & - x^{2\lambda}\frac{2^{-\lambda-1}\pi}{\sin \lambda\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \end{aligned} \right.$$

Ce développement comporte une partie régulière (série entière paire en x^{2k}) et une partie irrégulière en $x^{2\lambda+2k}$.

Lorsque λ tend vers un nombre entier, on obtient, par passage à la limite, les développement suivants : Pour $n = 0$:

$$\text{(C,2,4)}\quad \begin{cases} K_0(x) = -\left[C + \log\frac{x}{2}\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ \qquad + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \end{cases}$$

et, pour un entier n quelconque :

$$\text{(C,2,5)}\quad \begin{cases} x^n K_{-n}(x) = (-1)^{n+1}\left(\log\frac{x}{2} + C\right)2^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+k)} \\ \qquad + 2^{n-1}\sum_{k=0}^{n-}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ \qquad + (-1)^n 2^{n-1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\ \qquad + (-1)^n 2^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \cdots + \frac{1}{k} + 1\right. \\ \qquad \left. + \cdots + \frac{1}{n+k}\right)\frac{1}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+k)}. \end{cases}$$

On constate, ici encore, la présence d'une partie régulière (série paire en x^{2k}), et d'une partie irrégulière dont le terme général est en $x^{2(n+k)}\log x$. Dans ces formules, $C = 0{,}577\,216$ est la constante d'Euler.

Dans le cas particulier où λ est demi-entier, on a :

$$\text{(C,2,6)}\quad \begin{cases} \sqrt{x}\,K_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-x} \\ x^{n+\frac{1}{2}}K_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-x}\sum_{p=0}^{n}\frac{x^{n-p}}{2^p}\frac{(n+p)!}{p!(n-p)!}. \end{cases}$$

Pour les indices μ demi-entiers, $x^{\mu}K_{-\mu}$ se réduit au produit de l'exponentielle e^{-x} par un polynôme, et, pour $\mu = \frac{1}{2}$, à l'exponentielle elle-même.

D'une manière générale, $K_\lambda(x)$ se comporte, à l'infini, comme $\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}$. On a le développement asymptotique suivant :

$$\text{(C,2,7)}\quad K_\lambda(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}\left[1 + \frac{4\lambda^2-1}{1!8x} + \frac{(4\lambda^2-1)(4\lambda^2-3^2)}{2!(8x)^2} + \cdots\right].$$

K_λ admet des représentations intégrales. Les plus importantes sont liées à la transformation de Hankel de $(1+\rho^2)^{\mu}$. Elles sont données par

la formule (A,8,27) de l'Annexe A. On a aussi les représentations du type Sonine Schläfli, qui peuvent s'écrire :

$$\text{(C,2,8)} \qquad \begin{cases} K_\lambda(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} t} \operatorname{ch} \lambda t \, dt \\ \qquad = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)} u^{\lambda-1} \, du. \end{cases}$$

Mentionnons aussi la représentation remarquable de la fonction d'ordre zéro :

$$\text{(C,2,9)} \qquad K_0(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u^2-1}} \, du$$

et les relations de récurrence

$$\text{(C,2,10)} \qquad \begin{cases} K_{\lambda-1}(x) + K_{\lambda+1}(x) = -2K'_\lambda(x) \\ K_{\lambda-1}(x) - K_{\lambda+1}(x) = -\dfrac{2\lambda}{x} K_\lambda(x) \end{cases}$$

qui permettent le calcul de toutes les fonctions d'indice entier à partir de K_0 et K_1. En faisant $\lambda = 0$, on obtient, en particulier :

$$\text{(C,2,11)} \qquad K'_0(x) = -K_1(x).$$

ANNEXE D

FONCTIONS DE LAGUERRE

SOMMAIRE

Définition des fonctions de Laguerre de 1re et 2e espèce, et étude du passage à la limite pour les fonctions de 2e espèce.

La fonction de Laguerre $F(\alpha, \gamma, x)$ dite aussi fonction hypergéométrique confluente, est définie par la série entière :

$$(D,1) \qquad F(\alpha, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!}.$$

Elle constitue la solution régulière en $x = 0$ de l'équation différentielle :

$$(D,2) \qquad xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0.$$

Elle admet la représentation intégrale

$$(D,3) \qquad F(\alpha, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 e^{tx}\, t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt.$$

En changeant t en $1 - t$, on obtient la formule de transformation :

$$(D,4) \qquad F(\alpha, \gamma, -x) = e^{-x} F(\gamma - \alpha, \gamma, x).$$

La fonction $F(\alpha, \gamma, -x)$, à laquelle nous nous intéresserons de préférence, est la solution régulière à l'origine de l'équation différentielle :

$$(D,5) \qquad xy'' + (\gamma + x)y' + \alpha y = 0.$$

La solution générale de (D,5) est de la forme :

$$(D,6) \qquad y = AF(\alpha, \gamma, -x) + Bx^{1-\gamma} F(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, -x).$$

D'autre part, (pour $\gamma > \alpha$), la fonction :

$$(D,7) \quad L(\alpha, \gamma, x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_1^\infty e^{-ux} u^{\alpha-1}(u-1)^{\gamma-\alpha-1}\, du$$

est également solution de (D,5), donc de la forme générale (D,6). Pour le voir, on dérive (D,7) sous le signe somme, on porte dans (D,5) et on identifie l'argument de l'intégrale à

$$-\frac{d}{du}[e^{-ux}u^{\alpha}(u-1)^{\gamma}].$$

Par identification des coefficients A et B dans (D,6), on met (D,7) sous la forme :

$$(D,8) \quad L(\alpha,\ \gamma,\ x) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} F(\alpha,\ \gamma,\ -x) + x^{1-\gamma}\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} F(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma, -x).$$

Sous cette forme, on vérifie facilement la formule de transformation :

$$(D,9) \qquad L(\alpha,\ \gamma,\ x) = x^{1-\gamma}\, L(1-\gamma+\alpha,\ 2-\gamma,\ x).$$

D'où une deuxième représentation intégrale :

$$(D,10) \quad L(\alpha, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_1^\infty e^{-ux} u^{\alpha-\gamma}(u-1)^{-\alpha}\, du.$$

Pour $\alpha = 1$, par application de (B,1), on trouve :

$$(D,11) \qquad L(1,\ \gamma,\ x) = x^{1-\gamma}e^{-x}.$$

Et, pour $\gamma - \alpha = 1$, (D,7) se réduit à la fonction integro-exponentielle :

$$(D,12) \qquad L(\alpha,\ \alpha+1,\ x) = \int_1^\infty e^{-ux}u^{\alpha-1}\, du.$$

L'application de (D,8) donne l'intégro-exponentielle sous la forme :

$$(D,13) \quad L(\alpha, \alpha+1, x) = -\frac{1}{\alpha} F(\alpha, \alpha+1, -x) + \Gamma(\alpha)x^{-\alpha}.$$

Passage à la limite. — Lorsque γ est *un entier*, la fonction $L(\alpha,\ \gamma,\ x)$, sous la forme (D,8), n'est plus définie. On obtient son développement par un passage à la limite. La formule (D,9) permet de se limiter au cas où $1 - \gamma$ est un entier p positif. Posons

$$1 - \gamma = p + \varepsilon.$$

Dans le développement explicite de (D,8), les p premiers termes de

$F(\alpha, \gamma, -x)$ peuvent être séparés du reste, et le terme d'ordre $n+p$ de $F(\alpha, \gamma, -x)$ peut être rapproché du terme d'ordre n de

$$F(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma, -x).$$

On obtient ainsi :

$$\left.\begin{aligned} L(\alpha,\gamma,x) = {} & \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)}\left[1+\sum_{n=1}^{p-1}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right] \\ & + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+n+p)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n+p)}\frac{(-1)^{n+p}}{\Gamma(n+p+1)}x^{n+p}\right. \\ & \left. + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\frac{\Gamma(1-\gamma+\alpha+n)}{\Gamma(1-\gamma+\alpha)}\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma+n)}\frac{(-1)^n}{\Gamma(1+n)}x^{n+1-\gamma}\right]. \end{aligned}\right.$$

La première série, tend, lorsque γ tend vers $1-p$, vers :

$$\frac{(p-1)!}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{n=1}^{p-1}\frac{\alpha\dots(\alpha+n-1)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{(p-n-1)!}{n!}x^n.$$

Pour étudier la deuxième série, on simplifie le terme général par la formule (B,4) des compléments, et on remplace γ par $1-p-\varepsilon$:

$$(-1)^{n+1}\frac{\sin\alpha\pi}{\sin\varepsilon\pi}\frac{\Gamma(\alpha+n+p)}{\Gamma(1+n+\varepsilon)}\frac{x^{n+p}}{\Gamma(n+p+1)} + (-1)^n\frac{\sin\pi(\alpha+\varepsilon)}{\sin\varepsilon\pi}\frac{\Gamma(\alpha+n+p)}{\Gamma(n+p+1+\varepsilon)}\frac{x^{n+p-\varepsilon}}{\Gamma(1+n)}.$$

Lorsque ε tend vers 0, le passage à la limite se fait sans difficulté. On obtient finalement :

(D,14)

$$\left.\begin{aligned} & L(\alpha,1-p,x) = \frac{(p-1)!}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=1}^{p-1}\frac{\alpha\dots(\alpha+n-1)(p-n-1)!}{n!}x^n \\ & + \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+n+p)}{n!(n+p)!} \\ & \qquad \left[\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)} + \frac{\Gamma'(1+p+n)}{\Gamma(1+p+n)} - \frac{\Gamma'(\alpha+n+p)}{\Gamma(\alpha+n+p)} + \frac{\pi\cos\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}\right]x^{n+p} \\ & - \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n+p)}{n!(n+p)!}(-1)^n x^{n+p}\log x. \end{aligned}\right.$$

Si α est un entier supérieur à $-p$, le développement se simplifie, et, notamment, la partie irrégulière en $x^{n+p}\log x$ disparaît. Par contre, si α est un entier négatif inférieur ou égal à $-p$, le développement (D,14) n'est plus utilisable. C'est le cas, par exemple, de l'intégro exponentielle ($\alpha=-p$, $\gamma=1-p$). Pour $\alpha=-p-k$, il faut chercher la limite des k premiers termes des deux dernières séries. Nous nous limiterons à

$k = 1$ (intégro exponentielle). Posant $\alpha = -p + \varepsilon$, et utilisant la formule des compléments et sa dérivée, on obtient :

$$\sin \pi\alpha\Gamma(\alpha + p) = (-1)^p \sin \varepsilon\pi\Gamma(\varepsilon) = (-1)^p \frac{\pi}{\Gamma(1-\varepsilon)} \to (-1)^p\pi$$

$$\sin \pi\alpha\Gamma(\alpha + p)\left[\pi \frac{\cos \pi\alpha}{\sin \pi\alpha} - \frac{\Gamma'(\alpha + p)}{\Gamma(\alpha + p)}\right]$$

$$= (-1)^p \sin \pi\varepsilon\Gamma(\varepsilon)\left[\frac{\pi \cos \varepsilon\pi}{\sin \varepsilon\pi} - \frac{\Gamma'(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{p+1}\pi}{\Gamma(1-\varepsilon)} \frac{\Gamma'(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} \to (-1)^{p+1}\pi\Gamma'(1).$$

Il vient ainsi :

$$\text{(D,15)} \quad \left\{ \begin{aligned} L(-p,\ 1-p,\ x) = {} & \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^k}{p-k} \frac{x^k}{k!} \\ & + \frac{(-1)^p}{p!}\left[\frac{\Gamma'(1+p)}{\Gamma(1+p)} - \log x\right] x^p \\ & + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k-p} \frac{x^k}{k!}. \end{aligned} \right.$$

Ce développement peut aussi être obtenu, directement, à partir de (D,13).

ANNEXE E

LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

SOMMAIRE

Définition des fonctions hypergéométriques, et énoncé des propriétés utilisées dans l'ouvrage. On insiste surtout sur les formules d'échange de x en $1-x$, et de $-x$ en $-\frac{1}{x}$, en étudiant les passages à la limite dans les cas singuliers.

1. — Définition et propriétés.

La fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est définie par le développement :

$$\text{(E,1,1)} \quad \left\{ \begin{aligned} & F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x) = 1 \\ & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ \ldots\ (\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ \ldots\ (\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ \ldots\ (\gamma+n-1)}\,\frac{x^n}{n!} \\ & \quad = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\,\frac{x^n}{n!}. \end{aligned} \right.$$

Elle constitue la solution régulière au voisinage de l'origine de l'équation différentielle de Gauss :

$$\text{(E,1,2)} \qquad x(1-x)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)x]\,y' - \alpha\beta y = 0$$

dont la solution générale (sauf valeurs singulières des paramètres) est de la forme :

$$\text{(E,1,3)} \qquad y = AF(\alpha, \beta, \gamma, x) + Bx^{1-\gamma}F(1+\alpha-\gamma, 1+\beta-\gamma, 2-\gamma, x).$$

La fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est suymétrique en α et β. Pour $R_e(\beta) > 0$, $R_e(\gamma) > \beta$, et $x < 1$, elle admet la représentation intégrale suivante :

(E,1,4)

$$\left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)x^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^x \varrho^{\beta-1}\,(1-\varrho)^{-\alpha}\,(x-\varrho)^{\gamma-\beta-1}\,d\varrho. \end{aligned} \right.$$

De la deuxième représentation intégrale, on déduit une expression de la deuxième solution de l'équation de Gauss :

$$\text{(E,1,5)}\quad x^{1-\gamma}F(1+\alpha-\gamma,\ 1+\beta-\gamma,\ 2-\gamma,\ x) = \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \rho^{\beta-\gamma}(1-\rho)^{\gamma-\alpha-1}\,(x-\rho)^{-\beta}\,d\rho.$$

De la première relation (E,1,4) on tire, en posant $t = \dfrac{x(1-u)}{1-ux}$, la formule de transformation :

$$\text{(E,1,6)}\quad F(\alpha,\beta,\gamma,x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x).$$

2. — Échange de x en $1-x$.

On vérifie facilement que $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma\ ,\ 1-x)$ vérifie l'équation différentielle :

$$x(1-x)y'' + [1+\alpha+\beta-\gamma-(1+\alpha+\beta)x]\,y' - \alpha\beta y = 0$$

et se met donc sous la forme (E,1,3), après remplacement de γ par

$$1+\alpha+\beta-\gamma.$$

Par identification des constantes A et B on obtient la 1re formule d'échange de x en $1-x$:

$$\text{(E,2,1)}\quad \begin{cases} F(\alpha,\beta,\gamma,1-x) = \dfrac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\,F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,x) \\ \qquad + \dfrac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,x^{\gamma-\alpha-\beta}\,F(\alpha-\beta,\gamma-\alpha,1+\gamma-\beta,x). \end{cases}$$

Lorsque $\gamma-\alpha-\beta = k$ est un entier positif, on doit effectuer le passage à la limite sur (E,2,1) par la même méthode que dans l'Annexe D. (Si $\gamma-\alpha-\beta$ est un entier négatif, on se ramène, par la formule (E,1,6), au cas d'un entier positif). On obtient le résultat suivant :

$$\text{(E,2,2)}\quad \begin{cases} F(\alpha,\ \beta,\alpha+\beta+k,\ 1-x) = \dfrac{\Gamma(k+\alpha+\beta)\,(k-1)!}{\Gamma(\beta+k)\,\Gamma(\alpha+k)} \\ \left[1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{k-1} \frac{\alpha\ldots(\alpha+n-1)\,\beta\ldots(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+k)\ldots(\alpha+\beta+k+n-1)}\,\frac{x^n}{n!}\right] \\ + \dfrac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+k)\,\Gamma(\beta+k)} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n+k)\,\Gamma(\beta+n+k)}{n!(n+k)!} \\ \left[\dfrac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)} + \dfrac{\Gamma'(1+n+k)}{\Gamma(1+n+k)}\right. \\ \qquad \left. - \dfrac{\Gamma'(\alpha+n+k)}{\Gamma(\alpha+n+k)} - \dfrac{\Gamma'(\beta+n+k)}{\Gamma(\beta+n+k)} - \log x\right]x^{n+k}. \end{cases}$$

Nous aurons également besoin de savoir changer x en $1-x$ dans la deuxième solution de l'équation de Gauss, $x^{1-\gamma}\,F(1+\alpha-\gamma,\ 1+\beta-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)$. La deuxième formule d'échange de x en $1-x$ s'obtient en appliquant (E,2,1) à $F(1+\alpha-\gamma,\ 1+\beta-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)$, et en transformant les deux hypergéométriques obtenues à l'aide de (E,1,6). Le résultat de ces opérations sera utilisé sous la forme suivante :

(E,2,3)

$$\begin{aligned}(1-x)^{1-\gamma}F(1+\alpha-\gamma,\ 1+\beta-\gamma,\ 2-\gamma,\ 1-x)\\ =\frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)}F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,x)\\ +\frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)\,\Gamma(1+\beta-\gamma)}x^{\gamma-\alpha-\beta}\\ F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,1+\gamma-\alpha-\beta,x).\end{aligned}$$

Lorsque $\gamma-\alpha-\beta$ est un entier positif k, le passage à la limite s'étudie à la manière habituelle, et conduit à la formule suivante :

(E,2,4)

$$\begin{aligned}&(1-x)^{1-k-\alpha-\beta}F(1-k-\beta,\ 1-k-\alpha,\ 2-k-\alpha-\beta,\ 1-x)\\ &=\frac{\Gamma(2-k-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)}\\ &\left[1+\sum_{n=1}^{k-1}\alpha\ldots(\alpha+n-1)\,\beta\ldots(\beta+n-1)\,(k-n-1)!\,\frac{x^n}{n!}\right]\\ &+(-1)^k\,\Gamma(2-k-\alpha-\beta)\,\frac{\sin\pi\alpha\,\sin\pi\beta}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n+k)\,\Gamma(\beta+n+k)}{n!\,(n+k)!}\\ &\left[\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)}+\frac{\Gamma'(1+n+k)}{\Gamma(1+n+k)}-\frac{\Gamma'(\alpha+n+k)}{\Gamma(\alpha+n+k)}-\frac{\Gamma'(\beta+n+k)}{\Gamma(\beta+n+k)}\right.\\ &\left.-\frac{\cos\pi\beta}{\sin\pi\beta}-\frac{\cos\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}-\log x\right]x^{n+k}.\end{aligned}$$

3. — Échange de $-x$ en $-\frac{1}{x}$.

En changeant x en $\frac{1}{x}$ dans l'équation de Gauss, et en identifiant les constantes on obtient la formule d'échange de $-x$ en $-\frac{1}{x}$. (Les signes moins sont nécessaires, si l'on veut avoir des valeurs réelles pour x réel positif).

(E,3,1)

$$\begin{aligned}F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ -x)&=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}x^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha+1-\beta,\ -\frac{1}{x}\right)\\ &+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}x^{-\beta}F\left(\beta,\ \beta+1-\gamma,\ \beta+1-\alpha,\ -\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Lorsque $\beta - \alpha = k$ est un entier positif (pour un entier négatif, il suffit d'intervertir les rôles de α et β), on trouve, par les passages à la limite habituels :

(E,4,1)

$$
\begin{aligned}
&F(\alpha,\ \alpha+k,\ \gamma,\ -x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\gamma-\alpha)}\,x^{-\alpha} \\
&\qquad\left[(k-1)\,! + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma+n)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)}\,\frac{(k-n-1)\,!}{n\,!}\,\frac{1}{x^n}\right] \\
&+ \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,\frac{\sin(\gamma-\alpha)\pi}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k+n)\Gamma(\alpha+k+n+1-\gamma)}{n\,!(n+k)\,!}\,(-1)^n \\
&\qquad\left[\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)} + \frac{\Gamma'(1+k+n)}{\Gamma(1+k+n)} - \frac{\Gamma'(\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)} - \frac{\Gamma'(\beta+1-\gamma+n)}{\Gamma(\beta+1-\gamma+n)}\right. \\
&\left.+ \pi\,\frac{\cos(\gamma-\alpha)\pi}{\sin(\gamma-\alpha)\pi} - \log\frac{1}{x}\right]\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+k+n}.
\end{aligned}
$$

ANNEXE F

EXPRESSION DU ZITTERBEWEGUNG A L'AIDE DES FONCTIONS DE BERNOUILLI

SOMMAIRE

1. — *Définition du nombre* B_λ *et de la fonction* $B_\lambda(x)$ *de Bernouilli pour des indices* λ *non entiers.* $B_\lambda(x)$ *est défini par un développement en série de Fourier dont le terme général a un coefficient en* $\frac{1}{p^\lambda}$.

2. — *Application au calcul explicite du terme fluctuant (Zitterbewegung) dans l'expression d'une variance d'estimation transitive à une dimension. Si* a *est la maille,* b *la portée, et* ε *le nombre compris entre* 0 *et* 1 *congru à* $\frac{b}{a}$ *modulo* 1, *le terme fluctuant associé à* $(b - x)^\lambda$ *est :* $Z_\lambda(\varepsilon)a^{1+\lambda}$ *avec*

$$Z_\lambda(\varepsilon) = \frac{2}{1+\lambda} B_{\lambda+1}(\varepsilon).$$

Le terme fluctuant a une moyenne nulle relativement à ε *:*

$$\int_0^1 Z_\lambda(\varepsilon)\, d\varepsilon = 0.$$

3. — *Les résultats obtenus conduisent à une généralisation de la formule d'Euler-Mac Laurin au cas où certaines irrégularités analytiques se manifestent aux extrémités de l'intervalle d'intégration.*

1. — Fonctions et nombres généralisés de Bernouilli.

Le nombre de Bernouilli d'indice pair $2k$ est donné classiquement par :

$$B_{2k} = \frac{(2k)!}{\pi^{2k} 2^{2k-1}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2k}}$$

tandis que le polynôme de Bernouilli d'indice entier k coïncide, sur

l'intervalle (0,1), avec la fonction périodique définie par le développement :

$$B_k(x) = \frac{k!}{\pi^k 2^{k-1}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi px - k\frac{\pi}{2}\right)}{p^k}.$$

La relation entre le nombre B_{2k} et le polynôme $B_{2k}(x)$ est la suivante :

$$B_{2k} = (-1)^k B_{2k}(0).$$

Par une généralisation immédiate, nous définirons (pour $\lambda > 1$ quelconque) un nombre généralisé et une fonction de Bernouilli :

$$\text{(F,1)} \qquad \begin{cases} B_\lambda = \dfrac{\Gamma(1+\lambda)}{\pi^\lambda 2^{\lambda-1}} \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^\lambda} \\ B_\lambda(x) = \dfrac{\Gamma(1+\lambda)}{\pi^\lambda 2^{\lambda-1}} \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi px - \lambda\frac{\pi}{2}\right)}{p^\lambda}. \end{cases}$$

En particulier, on a :

$$\text{(F,2)} \qquad B_\lambda(0) = \cos\lambda\frac{\pi}{2} B_\lambda.$$

2. — Calcul du Zitterbewegung.

D'après (IV,2,7), à chaque terme en $(b-x)^\lambda$ du développement d'un covariogramme autour de $x = b$ correspond, dans le développement limité de la variance d'estimation (calculée dans l'espace à une dimension) un terme de la forme :

$$Z_\lambda(\varepsilon)\, a^{1+\lambda}$$

où le coefficient $Z_\lambda(\varepsilon)$ ne dépend que de λ et de la quantité sans dimension ε égale à $\frac{b}{a}$ modulo 1 : si N est le plus grand entier tel que l'on ait $Na \leqslant b$, ε est définie par

$$\text{(F,3)} \qquad \varepsilon = \frac{b - Na}{a} \qquad \text{ou} \qquad \frac{b}{a} = N + \varepsilon \quad (0 \leqslant \varepsilon < 1).$$

Pour calculer explicitement $Z_\lambda(\varepsilon)$, nous utiliserons le covariogramme particulier :

$$\text{(F,4)} \qquad \begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{(2b)^\lambda}(b^2 - x^2)^\lambda & \text{pour } |x| \leqslant b \\ 0 & \text{pour } |x| > b \end{cases}$$

dont le développement commence par le terme $(b-x)^\lambda$, et pour lequel le terme d'extension s'évanouit, puisque la partie irrégulière au voisinage de 0 est identiquement nulle.

Nous calculerons $\sigma^2(a)$ par la formule théorique (IV,1,10), soit :

$$\sigma^2(a) = 2\sum_{p=1}^{\infty} G\left(\frac{p}{a}\right)$$

la transformée $G(u)$ de $g(u)$ étant égale, d'après (A,8,29) à :

$$G(u) = \frac{\Gamma(1+\lambda)}{(2\pi)^{\lambda}}\sqrt{b}\,\frac{1}{u^{\lambda+\frac{1}{2}}}\,J_{\lambda+\frac{1}{2}}(2\pi u b).$$

Il vient ainsi :

$$\frac{\sigma^2(a)}{a^{1+\lambda}} = 2^{1+\lambda}\pi^{-\lambda}\Gamma(1+\lambda)\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^{\lambda+\frac{1}{2}}}\,J_{\lambda+\frac{1}{2}}\left(2\pi p\,\frac{b}{a}\right).$$

Lorsque x est très grand, la partie principale de $J_{\lambda+\frac{1}{2}}(x)$ est :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\lambda\pi}{2}\right).$$

Ainsi, pour a très petit, $\dfrac{\sigma^2(a)}{a^{1+\lambda}}$ est équivalent à :

$$\frac{2^{1-\lambda}}{\pi^{1+\lambda}}\Gamma(1+\lambda)\Sigma\,\frac{1}{p^{1+\lambda}}\sin\left(2\pi p\,\frac{b}{a} - \frac{\lambda\pi}{2}\right).$$

D'après (3) $\dfrac{b}{a}$ est congru à ε modulo 1. L'expression ci-dessus, équivalente à $\dfrac{\sigma^2(a)}{a^{1+\lambda}}$ ne dépend que de λ et ε, et coïncide par suite avec $Z_\lambda(\varepsilon)$. D'où l'expression cherchée du Zitterbewegung :

$$\text{(F,5)} \qquad Z_\lambda(\varepsilon) = \frac{2^{1-\lambda}}{\pi^{1+\lambda}}\Gamma(1+\lambda)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2\pi p\varepsilon - \lambda\,\dfrac{\pi}{2}\right)}{p^{1+\lambda}}.$$

Il suffit de comparer avec l'expression (1) *de la fonction de Bernouilli* d'ordre $\lambda + 1$ pour obtenir :

$$\text{(F,6)} \qquad \boxed{Z_\lambda(\varepsilon) = -\frac{2}{\lambda+1}B_{\lambda+1}(\varepsilon)}$$

REMARQUES. — Pour $\varepsilon = 0$, $Z_\lambda(o)$ coïncide avec le coefficient T_λ servant au calcul de la variance d'extension : cela est immédiatement visible sur la formule (IV,2,9) :

$$Z_\lambda(o) = T_\lambda = -\frac{2}{1+\lambda}B_{1+\lambda}\sin\frac{\lambda\pi}{2}.$$

D'autre part, le développement (5) ne comporte pas de terme indépendant de ε, de sorte que l'on a, quel que soit $\lambda > 0$:

$$\int_0^1 Z_\lambda(\varepsilon)\, d\varepsilon = 0. \tag{F,7}$$

Cette circonstance permet, en pratique, de négliger le Zitterbewegung. En effet, ε n'est jamais connu à priori et peut être assimilé à une variable aléatoire dont la loi de probabilité est uniformément répartie sur l'intervalle (0,1). Il résulte alors de (7) que l'espérance mathématique du Zitterbewegung est égale à 0.

3. — Généralisation de la formule d'Euler-Mac Laurin.

Les résultats précédents permettent de proposer une généralisation de la formule d'Euler-Mac Laurin. Soit, sur l'intervalle $[0, b]$ une fonction $f(x)$ telle que

$$f(b) = 0.$$

On suppose que sur tout intervalle $[\alpha, b - \alpha]$ $(\alpha > 0)$ $f(x)$ est indéfiniment dérivable. En $x = 0$ et $x = b$, par contre, elle présente des irrégularités analytiques et admet des développements limités de la forme :

$$\sum_\lambda C_\lambda x^\lambda \qquad \text{et} \qquad \sum_\mu C'_\mu (b - x)^\mu$$

où les exposants λ et μ sont positifs. Soit $a < b$, et ε le nombre compris entre 0 et 1 congru à $\frac{b}{a}$ modulo 1. On a un développement limité de la forme :

$$\int_0^b f(x)\, dx = a\left[\frac{1}{2} f(0) + f(a) + f(2a) + \cdots + f(b - \varepsilon a)\right] - \sum_\lambda \frac{C_\lambda a^{1+\lambda}}{\lambda + 1} B_{\lambda+1}(0) - \sum_\mu \frac{C'_\mu a^{1+\mu}}{\mu + 1} B_{\mu+1}(\varepsilon)$$

où $B_{\lambda+1}(x)$ et $B_{\mu+1}(x)$ sont les fonctions de Bernouilli. Lorsque λ et μ ne prennent que des valeurs entières (lorsque $f(x)$ est dérivable en $x = 0$ et $x = b$), et pour $\varepsilon = 0$ on retrouve la formule usuelle d'Euler-Mac Laurin écrite en (IV,2,1).

TABLE DES MATIÈRES

Première Partie

LES REPRÉSENTATIONS TRANSITIVES

Introduction 5

Chapitre Premier. — ***Le Symbolisme transitif*** 17

1. — Le Covariogramme et sa transformée de Fourier 18
2. — Variable à support non ponctuel, et régularisation des variables .. 25
3. — Processus de montée et descente 28
4. — Montée et descente en clavier isotrope 31
5. — Clavier réciproque et groupe de Hankel 37

Chapitre II. — ***Exemples de claviers isotropes*** 41

1. — Les claviers de Bessel 42
2. — Claviers et représentations de Gauss 48
3. — Claviers de Laguerre 49
4. — Les claviers hypergéométriques 51
5. — Les claviers sphériques 56

Chapitre III. — ***Représentations transitives des Distributions*** 58

1. — Le symbolisme transitif pour les distributions à support borné .. 58
2. — Montée et descente pour les distributions tempérées isotropes 63
3. — Montée et descente pour la distribution $r\mu$ 67

Chapitre IV. — ***L'estimation des Variables régionalisées*** 69

1. — Théorie générale des mailles régulières 70
2. — Calcul des variances d'estimation à une dimension 77
3. — Calcul des variances d'estimation à plusieurs dimensions..... 83
4. — Mailles aléatoires stratifiées 89

Chapitre V. — ***Représentation Transitive des Corégionalisations*** 93

1. — La matrice de covariation 93
2. — Condition d'indépendance interne 96
3. — Relation entre une variable et son champ géométrique 98
4. — Les corrélations différées 100

Chapitre VI. — ***Application au problème géométrique*** 103

1. — Propriétés du covariogramme géométrique 103
2. — Application à l'estimation des surfaces 106

Deuxième Partie

LA THÉORIE INTRINSÈQUE

Chapitre VII. — ***Rappel sur les fonctions aléatoires*** 113
1. — Définition des Fonctions Aléatoires 114
2. — Fonctions aléatoires stationnaires d'ordre 2 116
3. — Intégration et dérivation stochastique 118

Chapitre VIII. — ***Les Schémas stochastiques intrinsèques*** 121

1. — Définitions et Moments 122
2. — Signification et propriétés de la fonction intrinsèque $\gamma(h)$ 125
3. — Variables non ponctuelles et variance d'extension 129
4. — Variance de v dans V 135
5. — Relation entre schémas intrinsèques et représentations transitives. 140

Chapitre IX. — ***Théorie intrinsèque des Corégionalisations*** 144

1. — Matrice de Codispersion intrinsèque 144
2. — Variables non ponctuelles et covariance d'extension 146
3. — L'Indépendance Intrinsèque 148

Chapitre X. — ***Distributions aléatoires et théorie intrinsèque pour les distributions*** 151

1. — Définition des distributions aléatoires 152
2. — La distribution de covariance 155
3. — Analyse harmonique d'une distribution stationnaire d'ordre 2 .. 158
4. — Régularisation d'une distribution stationnaire à accroissements indépendants 160
5. — Dérivation des Distributions aléatoires 167
6. — La Théorie Intrinsèque pour les distributions 169

Chapitre XI. — ***La Montée intrinsèque sous puissance constante*** 177

1. — Définition et algorithmes de la montée sous puissance constante . 177
2. — Montée droite sous puissance constante de r^λ 180
3. — Les formules du rectangle pour r^λ 185
4. — Les formules du parallélépipède pour r^λ 190

Chapitre XII. — ***L'estimation et le Krigeage*** 192

1. — Le problème de l'Estimation 193
2. — Mailles régulières à implantation préférentielle 196
3. — Calcul des variances d'estimation 199
4. — Maille régulière à implantation flottante 208
5. — Mailles aléatoires et aléatoires stratifiées 211
6. — Le Krigeage 214

Chapitre XIII. — ***Estimation et Fluctuation des moments intrinsèques*** 219

1. — Terminologie et Moments d'ordre 4 220
2. — Estimation et fluctuation de la dérive linéaire 223
3. — Estimation et fluctuation du demi-variogramme local 226
4. — Estimation et fluctuation de la variance locale 231

Troisième Partie

APPLICATIONS A LA GÉOSTATISTIQUE

Chapitre XIV. — ***Le schéma de Wijsien*** 241

1. — Les équivalents linéaires 241
2. — Reconnaissance d'un filon par traçages et montages..... 246
3. — Krigeage continu en schéma de Wijsien isotrope à 2 dimensions . 250

Annexe A. *Rappel sur les Distributions* 255
Annexe B 285
Annexe C 287
Annexe D 291
Annexe E 295
Annexe F 299

MASSON et C^ie^, Éditeurs
120, B^d^ S^t^-Germain, Paris (VI^e^),
Dépôt légal : 4^e^ trimestre 1965.

Imprimé en France
Marca registrada

IMPRIMERIE DURAND,
Luisant-Chartres
(Eure-et-Loir)
(9-1965)

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Granulométries en place et milieux poreux aléatoires.

Vu et approuvé :
Paris, le 21 juin 1965.
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean ROCHE